Esercizi di autovalutazione per l'esame orale di Fisica

Si suggerisce di svolgere almeno 6 esercizi su 8 della prima parte (più semplice) e almeno 3 su 7 della seconda.

Prima parte

Esercizio 1.1) Si osserva che una biglia di acciaio di raggio R e massa m che cade verticalmente in aria da un grande altezza si muove, dopo un tratto iniziale, con una velocità costante di modulo v_o. Discutete quale delle seguenti espressioni per v_o ritenete maggiormente plausibile formulando un corrispondente modello dinamico:

$$v_a \simeq \sqrt{\frac{mg}{\rho R^2}} \ ; \quad v_b \simeq \sqrt{\frac{k_B T}{(m - \frac{4\pi\rho R^3}{3})}} \ ; \quad v_c \simeq \frac{mg}{\sqrt{k_B T}} \ ; \quad v_d \simeq \frac{mg}{\sqrt{\rho k_B T R}} \ ;$$

ove T e ρ sono la temperatura e la densità dell'aria supposte uniformi (k_B è la costante di Boltzmann) e g l'accelerazione di gravità, anch'essa uniforme.

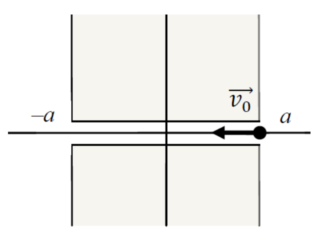
Esercizio 1.2) Una particella di massa m si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa descritta dall'energia potenziale data da

$$V(x \leq 0) = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \quad ; \qquad V(x \geq 0) = a\, m\, x \quad ,$$

ove k e a sono costanti strettamente positive. Si determini il periodo T del suo moto in funzione della sua energia meccanica totale $E > 0$.

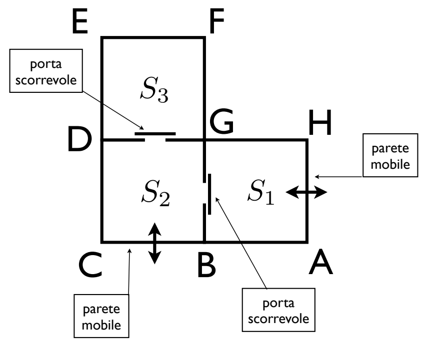
Esercizio 1.3) Immaginiamo di fare una foto a una ruota di bicicletta che rotola senza strisciare. La ruota è schematizzabile come una circonferenza unita al centro da un gran numero di raggi. Poiché, per fare una foto, l'obiettivo della macchina fotografica viene aperto per un tempo piccolo δt ma non nullo, la maggior parte della foto apparirà sfuocata, perché gli elementi della ruota si spostano durante il periodo di apertura dell'obiettivo. Eppure, ci sono dei punti ove la foto è perfettamente a fuoco: sapete individuarli?

Esercizio 1.4) Lo strato $-a < x < a$ è uniformemente carico con densità di carica elettrica per unità di volume $\rho > 0$ e lungo l'asse x è praticato un foro molto sottile che lo attraversa (figura 2). Una particella di massa m e carica $q > 0$ si muove lungo l'asse x; a un dato istante si trova nel punto $(a, 0, 0)$ e si muove con velocità $\vec{v} = (v_o, 0, 0)$, con $v_o < 0$. Si determini il valore minimo di $|v_o|$ che consente alla particella di attraversare completamente il foro nello strato.



Esercizio 1.5) Si consideri il sistema costituito da due sfere uniformemente cariche: la prima di raggio a e densità di carica $\rho_a < 0$ ha il centro nel punto $(0, 0, -2a)$; la seconda di raggio b e densità di carica $\rho_b > 0$ ha il centro nel punto $(0, 0, 2b)$. Si determinino il valore minimo ed il valore massimo del lavoro richiesto per portare una carica puntiforme $q > 0$ da un punto iniziale $\vec{P}_a$ ad un punto finale $\vec{P}_b$ al variare di $\vec{P}_a$ sulla superficie della prima sfera e di $\vec{P}_b$ sulla superficie della seconda.

Esercizio 1.6) Si consideri un recipiente ermetico diviso in tre scomparti cubici S_1, S_2 ed S_3, aventi eguale volume V e disposti ad L come mostrato in figura in sezione. Gli scomparti S_2 ed S_3 sono inizialmente vuoti, mentre nello scomparto S_1 si trovano n moli di un gas perfetto in equilibrio termico a temperatura T. Le pareti divisorie interne BG e DG del contenitore sono dotate di porte a scorrimento che possono essere azionate esternamente. La parete esterna AH può viceversa essere spostata rigidamente e senza attrito tramite l'azione di un pistone lungo le direzioni indicate in figura fino (e non oltre) ad essere portata in coincidenza con la parete BG. Analogamente la parete esterna CB può essere spostata da un secondo pistone fino a toccare la parete interna DG. Assumendo



che l' apertura e la chiusura delle porte a scorrimento di BG e DG possa essere eseguita soltanto quando l' intero recipiente è posto in condizione di isolamento termico rispetto all' esterno e che l' attivazione dei pistoni agenti su AH e CB sia possibile soltanto quando il recipiente è posto in equilibrio con un bagno termico di temperatura T, si determini il valore minimo $\Delta Q_{diss}^{(min)}$ del calore che il sistema deve dissipare verso l'esterno per spostare il gas dallo scomparto S_1 allo scomparto S_3.

Esercizio 1.7) Si vuole progettare una scala mobile. Determinare la potenza a massimo regime del motore in termini dei parametri rilevanti che definiscono la scala, trascurando ogni attrito.

Esercizio 1.8) Si consideri un circuito elettrico formato da due lunghissimi binari di resistenza trascurabile, verticali, paralleli e separati dalla distanza a, collegati in alto da una traversa fissa di resistenza R e in basso da una traversa mobile di resistenza trascurabile, lunghezza a e massa m, i cui estremi sono liberi di scorrere ciascuno lungo uno dei binari senza alcun attrito. In presenza dell'accelerazione di gravità g e di un campo magnetico esterno costante ed uniforme, di modulo B e perpendicolare al piano verticale che contiene i binari, si osserva che la traversa mobile lasciata libera di cadere nel vuoto raggiunge, dopo un transiente iniziale, una velocità limite v. Si determini v e si dia conto del bilancio energetico relativo a tale caduta a velocità costante.

Soluzioni parte 1

Soluzione 1.1) La velocità v_o è la velocità limite dovuta alla resistenza dell'aria e la risposta corretta è v_a.

Soluzione 1.2) Il periodo è:

$$T(E) = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2E}{m}} \,.$$

Soluzione 1.3) L'insieme dei punti a fuoco nella fotografia è dato dal cerchio di raggio $R/2$ (dove R è il raggio della ruota), centrato a metà del segmento che congiunge il punto di contatto al centro della ruota.

Soluzione 1.4) Il valor minimo di $|v_o|$ é dato da

$$v_{min} = \sqrt{\frac{q\,\rho}{\epsilon_o\, m}}\; a \,.$$

Soluzione 1.5) Il lavoro minimo vale

$$L_{min} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_b}{b} + \frac{Q_a}{b+2a} - \frac{Q_a}{a} - \frac{Q_b}{a+2b} \right) \,,$$

mentre il lavoro massimo è

$$L_{max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_b}{b} + \frac{Q_a}{3b+2a} - \frac{Q_a}{a} - \frac{Q_b}{3a+2b} \right) \,,$$

dove sono stati definiti $Q_a = (4\pi/3)a^3\rho_a$ e $Q_b = (4\pi/3)b^3\rho_b$.

Soluzione 1.6) Il minimo calore dissipato è:

$$\Delta Q_{diss}^{(min)} = nRT \ln 3 \,.$$

Soluzione 1.7) La potenza è:

$$P \sim \frac{lv}{A} hmg$$

dove h è il dislivello superato dalla scala, m il peso medio delle persone trasportate, l la larghezza della scala, v la velocità del nastro trasportatore e A è la superficie media a disposizione di una singola persona.

Soluzione 1.8) La velocità è $v = mgR/(a^2\, B^2)$. La potenza dissipata nella resistenza corrisponde alla variazione temporale dell'energia potenziale gravitazionale: $R\, I^2 = m\, g\, v$.

Seconda Parte

Esercizio 2.1) Si consideri un gas ionizzato, complessivamente neutro, composto da N ioni aventi carica $+q$ ed altrettanti aventi carica $-q$, in un volume V alla temperatura T (N e V siano macroscopicamente grandi). In assenza di perturbazioni esterne, la densità degli ioni positivi per unità di volume e quella degli ioni negativi sono uniformi. In presenza di una carica esterna Q_o fissa in un punto all'interno del gas ionizzato si osserva che la distribuzione degli ioni viene perturbata col risultato che il potenziale elettrico risultante ha la forma di un potenziale schermato data da

$$U(r) = \frac{Q_o}{4\pi\epsilon_o\, r}\, e^{-r/l}\,,$$

ove r è la distanza dalla carica Q_o e l una lunghezza caratteristica. Si discuta quale delle seguenti espressioni per l, ove k_B è la costante di Boltzmann, potrebbe essere valida:

$$a)\quad l \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o\, k_B\, T} \qquad b)\quad l \approx \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_o\, k_B\, T\, V}{N\, q^2}} \qquad c)\quad l \approx \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}.$$

Esercizio 2.2) Un fucile spara un fascio di pallini di diametro pari a 0.5 mm e massa minore di 0.01 gr con divergenza trascurabile. Tale fascio urta perpendicolarmente la faccia di un bersaglio cubico di polistirolo di lato 2 m nel quale sono distribuite casualmente 300 sfere di ferro di 1 cm di raggio [densità del ferro $7.8\ \ \mathrm{gr/cm^3}$]. Il fucile viene mosso in modo da colpire il bersaglio molte volte in molti punti sulla stessa faccia. Assumere che i pallini attraversino indisturbati il polistirolo e che interagiscano elasticamente con le sfere. Nel risolvere il problema si trascuri l' effetto della gravità.

i Calcolare con un'approssimazione migliore del 10% la frazione di pallini che subisce una deviazione di più di $120°$ rispetto alla direzione iniziale di moto.

ii Si moltiplichi per 30 il numero delle sfere. Calcolare nella stessa approssimazione del caso precedente la frazione di pallini che superano il bersaglio senza essere deviati.

Esercizio 2.3) Lo strato $0 < z < a$ è occupato dalla densità di carica costante ed uniforme $\rho > 0$, mentre lo strato $-a < z < 0$ dalla densità di carica costante ed uniforme $-\rho$. Una particella di massa m e carica $q > 0$ si avvicina al piano $z = 0$ proveniendo da una distanza dal piano grande rispetto ad a con velocità iniziale $\vec{v}_o = (\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \frac{1}{\sqrt{2}})\, v_o$, ove $v_o > 0$. Si determini se la particella può attraversare o meno entrambi gli strati carichi e se ne determini la velocità finale $\vec{v}_f$ una volta che se ne sia nuovamente allontanata a distanza grande rispetto ad a. E' possibile che la particella non si allontani più ad una distanza dal piano $z = 0$ maggiore di a ?

Esercizio 2.4) Si consideri un liquido dielettrico non perfettamente isolante, caratterizzato quindi oltre che dalla sua costante dielettrica relativa ϵ_r, anche da un'elevata resistività elettrica ρ (si ricorda che all'interno di un conduttore in presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ scorre una corrente per unità di area data da $\vec{j} = \vec{E}/\rho$, ove la direzione della corrente è lungo il campo elettrico e la superficie considerata è a esso perpendicolare). Si supponga di voler determinare sperimentalmente il valore di ρ avendo a disposizione degli elettrodi costituiti da biglie metalliche di raggio a variabile ($a = 1.0$ mm, $a = 3.0$ cm, $a = 5.0$ cm, $a = 30$ cm) collegabili a dei fili elettrici di lunghezza variabile a piacere costituiti da un cavo metallico di diametro d variabile ($d = 1.0$ mm, $d = 5.0$ mm, $d = 3$ cm) racchiuso in una guaina isolante di gomma. Avete a disposizione una vasca cubica di lato $L = 1$ m, quasi piena di liquido, a cui potete accedere dall'alto. L'unico strumento a disposizione è un tester che può misurare la resistenza equivalente $R = V/I$ di un circuito sulla base della corrente I che vi scorre e della corrispondente differenza di potenziale V. Si descriva la procedura seguita e il posizionamento degli elettrodi, discutendo tutte le assunzione ed approssimazioni rilevanti e, in particolare, le scelte fatte per il raggio degli elettrodi e il diametro dei fili impiegati.

Esercizio 2.5) In una calda giornata estiva decidete di comprare un gelato ad un bar. Il barista vi invita a servirvi da soli quindi aprite la porta di vetro del frigorifero, prendete il gelato e richiudete la porta del frigorifero. Poco dopo un vostro amico vi chiede di prendere un secondo gelato dal frigorifero ma vi accorgete che la porta è adesso molto più difficile da aprire. Dopo un certo tempo, sufficientemente lungo, la porta torna ad aprirsi facilmente. Si dia una spiegazione di questo fenomeno e si faccia una stima del valore massimo della forza in più da applicare la seconda volta alla maniglia (che è posta sul lato della porta più lontano dalle cerniere), in funzione delle seguenti variabili:

le dimensioni del frigorifero (altezza h, larghezza w e profondità d), la temperatura dell'ambiente e del frigorifero (T_a, T_f), la frazione di volume del frigorifero occupato dai gelati e dalle strutture interne del frigorifero ($f_{\rm occ}$) e il volume di aria fredda che esce dal frigorifero - e viene sostituita da aria che prima era all'esterno - quando la porta viene aperta e richiusa ($V_{\rm air}$).

Esercizio 2.6) Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a $-5.2\ ^oC$ per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale h_0= 25 cm. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di 37 cm e dopo 21 giorni uno spessore di 44 cm, si stimi lo spessore h_f raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni.

Esercizio 2.7) I nuclei degli atomi sono costituiti da Z protoni e N neutroni, il numero totale di nucleoni è dunque $A = Z + N$. Si assuma che i nucleoni siano sfere non compenetrabili di raggio $R_0 \sim 1$ fm = 10^{-15} m e che siano distribuiti in modo da poter approssimare i nuclei come sfere di densità di carica e di massa uniformi.

i Determinare approssimativamente il raggio del nucleo in funzione di A.

ii Scrivere un'espressione per la componente U_e dell'energia del nucleo dovuta all'interazione Coulombiana.

iii La componente dell'energia dovuta all'interazione nucleare forte per $Z, A \gg 1$ può essere scritta come $U_f = E_f A^r Z^p$, dove E_f è una costante con le dimensioni di una energia. Determinare gli esponenti r e p sapendo che l'interazione forte a) non distingue tra neutroni e protoni b) è di contatto.

iv Stimare l'ordine di grandezza di E_f.

v Il valore di U_f trovato al punto 3 sovrastima l'attrazione perchè i nucleoni sulla superficie interagiscono con un numero minore di nucleoni rispetto a quelli interni. La prima correzione sarà quindi proporzionale alla superficie del nucleo. Scrivere un'espressione per U_f che includa questo effetto e disegnare un grafico dell'energia totale per nucleone $(U_f + U_e)/A$ in funzione di Z, approssimando $A \simeq 2Z$.

vi Stimare l'ordine di grandezza dell'energia rilasciata dalla fissione (rottura di un nucleo pesante in due leggeri) di un kg di uranio ($Z = 92$).

Sono date le seguenti costanti: numero di Avogadro $N_A \simeq 6 \cdot 10^{23}$, $e^2/(4\pi\epsilon_0) \simeq 10^{-28}$ J $\cdot$ m.

Soluzioni parte 2

Soluzione 2.1) La lunghezza l è determinata dalla competizione tra l'agitazione termica e l'interazione Coulombiana. l deve diminuire al crescere di q e aumentare al crescere di T. Solo la (b) mostra il corretto andamento.

Soluzione 2.2)

i La probabilità di avere una deflessione superiore a $120°$ è $\sim \frac{N\pi R^2}{4L^2} \simeq 0.0059$;

ii la probabilità di superare il bersaglio in questo caso è $\sim 49\%$.

Soluzione 2.3) La particella viene riflessa dal gradino di potenziale se $mv_o^2/4 < q\,\rho\, a^2/\epsilon_0$, nel qual caso la sua velocità finale vale $\vec{v}_o = (\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, -\frac{1}{\sqrt{2}})\, v_o$; attraversa entrambi gli strati, ma rimane sul piano $z = a$ con velocità finale $\vec{v}_o = (\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0, 0)\, v_o$ se $mv_o^2/4 = q\,\rho\, a^2/\epsilon_0$ (caso limite instabile); infine, se $mv_o^2/4 > q\,\rho\, a^2/\epsilon_0$ attraversa entrambi gli strati venendo rifratta dal gradino di potenziale e allontanandosene nuovamente con velocità finale $\vec{v}_o = (\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \frac{\eta}{\sqrt{2}})\, v_o$ ove $\eta = \sqrt{1 - 4q\,\rho\, a^2/(mv_0^2\epsilon_0)}$.

Soluzione 2.4) E' necessario che il diametro dei fili sia piccolo rispetto al raggio degli elettrodi e che la distanza tra gli elettrodi (e la loro distanza dalle pareti della vasca, dal fondo e dal pelo libero del liquido) sia grande rispetto al loro raggio; sono possibili varie scelte: ($a = 3$ cm, $d = 1$ mm), ($a = 5$ cm, $d = 1$ mm), ($a = 5$ cm, $d = 5$ mm). La resistenza equivalente letta dal tester vale

$$R = \frac{V}{I} = \frac{2\,q/(4\pi\epsilon_o\epsilon_r\, a)}{q/(\rho\epsilon_o\epsilon_r)} = \frac{\rho}{2\pi\, a}\,;$$

indipendente da ϵ_r (e il contributo dei fili di collegamento è trascurabile essendo la resistività del liquido elevata).

Soluzione 2.5) Il momento, dovuto alla differenza di pressione, alla seconda apertura del frigorifero è dato da:

$$\tau_{\Delta P} = \frac{1}{2} h w^2 \Delta P$$

dove $\Delta P = P_{\rm int} - P_{\rm atm}$ e $P_{\rm int} = \frac{nRT_f}{w\cdot d\cdot h\cdot(1-f_{\rm occ})}$.

Soluzione 2.6) L'incremento di spessore Δh in un intervallo di tempo Δt soddisfa la relazione

$$\Delta h = \kappa\,\frac{1}{h}\,\Delta t\,,$$

dove κ è una costante che si può stimare dai dati per arrivare a concludere che

$$h_f \sim \sqrt{(25^2 + 62.5 * 60)}\ \text{cm} = 66\ \text{cm}.$$

Soluzione 2.7)

i $R \simeq R_0 A^{1/3}$;

ii $U_e \sim \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} Z^2/R$;

iii $p = 0$ e $r = 1$;

iv $E_f \sim \frac{3}{5}\frac{e^2 Z^2}{4\pi\epsilon_0 AR}|_{Z=100} \simeq 10^{-12} J$;

v $U_f = E_f(A - c_s A^{2/3})$, con c_s una costante di ordine 1;

vi l'energia liberata dalla fissione è $\sim 10^{13}$ J.