

Esercizi di autovalutazione

per la prova orale in

Matematica

per l'ammissione a posti di allievo al primo anno
nel corso ordinario della Classe di Scienze della

Scuola Normale Superiore

per l'anno accademico 2020/21

Nel seguito vengono riportate alcune domande che sono state poste in passato durante gli orali in Matematica per l'ammissione al primo anno della Scuola Normale Superiore.

Si raccomanda inoltre al candidato di leggere il [programma d'esame](https://www.sns.it/it/classe-scienze-anno-corso-ordinario)¹ e di affrontare alcuni esercizi delle [prove scritte](https://www.sns.it/it/prove-desame-anno-classe-scienze)² tenute negli anni precedenti.

1. L' algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore di due interi positivi n, m . Perché questo algoritmo termina, e perché ottiene il risultato desiderato?
2. Dati a, b numeri reali e n intero positivo, si definisca il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ e si dimostri la formula dello sviluppo di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

3. Con quanti zeri termina il numero 2020! (leggasi *duemilaventi fattoriale*)?
4. Come si può dimostrare che esistono infiniti numeri primi?
5. Consideriamo, nel piano cartesiano, un poligono regolare di n lati che ha centro nell'origine. Dimostrare che la somma dei vettori che vanno dall'origine ai vertici fa 0.
6. Notiamo che il polinomio $p(x) = 2x^2 - 1$ ha coefficienti reali e soddisfa l'identità $p(\cos x) = \cos(2x)$. Esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali tale che l'identità $p(\sin x) = \sin(2x)$ sia soddisfatta?
7. Trovare un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi per cui $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ sia una radice.
8. Caratterizzare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti interi tali che $p(n)$ è un quadrato perfetto per ogni n intero.
9. Si studi la funzione $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ per $x > 0$.
10. Per $a, b > 0$ si dimostri che

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} .$$

11. Sia dato un ottaedro, qual è il percorso più breve che collega un vertice al vertice opposto, muovendosi solo sulla superficie?
12. Ada e Bob giocano a un gioco. Ada fa girare una ruota della fortuna che riporta i numeri da 1 ad a (inclusi), se esce uno Ada vince; altrimenti passa la mano a Bob che fa girare una ruota della fortuna che riporta i numeri da 1 ad b (inclusi), se esce uno Bob vince; altrimenti passa la mano ad Ada; e così via.

Calcolare la probabilità che Ada vinca il gioco (come funzione di a, b).

¹<https://www.sns.it/it/classe-scienze-anno-corso-ordinario>

²<https://www.sns.it/it/prove-desame-anno-classe-scienze>