Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Prova di Algebra e Geometria
per l'ammissione alla Laurea Specialistica in Matematica

Anno accademico 2003–2004

1. Sia S il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathbf{Re}\, z > 0\}$. Descrivere le immagini $f(S)$ e $g(S)$, dove
$$f(z) = z^2 \qquad \text{e} \qquad g(z) = \frac{z-1}{z+1}\,.$$
Sia r la semiretta $\{x+\mathbf{i} : x \in \mathbb{R},\, x \leq 0\}$. Trovare una funzione olomorfa F definita sul disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ per cui $F(D) = \mathbb{C} \setminus r$ e $F(0) = 0$.

2. Definire la curvatura Gaussiana K di una superficie in $\mathbb{R}^3$ in termini delle (prima e seconda) forme fondamentali. Data la superficie parametrizzata da $\big(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, f(\rho)\big)$, trovare le funzioni f per cui K è nulla e descrivere le superfici associate.

3. Determinare i poli ed i residui della funzione
$$\frac{e^{\mathbf{i}z}}{e^{z}+e^{-z}}$$
nel piano complesso.
Calcolare poi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx\,.$$

4. Provare che l'applicazione
$$(x,y) \longmapsto (Ax+By+s, Cx+Dy+t)$$

(con tutti i coefficienti reali e $AD-BC\neq 0$) trasforma un'ellisse in un'altra ellisse.
Si considerino le ellissi

$$E_1 : \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \qquad\qquad E_2 : \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4\,.$$

Mostrare che, per ogni $p\in E_1$, esiste un'unica ellisse F_p che tocca E_1 in p ed in un altro punto e che tocca anche E_2 in due punti. Le ellissi F_p (con p che varia in E_1) hanno la stessa area e lo stesso perimetro?

5. Siano A, B, C, D quattro matrici $n\times n$ con elementi complessi tali che le matrici AB^T, CD^T siano simmetriche e $AD^T - BC^T = I$. Si dimostri che $A^TD - C^TB = I$.

Anno accademico 2004–2005

1. Sia

$$X \;=\; \left\{([x],[y])\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \;:\; x_0x_1y_2^2 = y_0y_1x_2^2\right\}\,.$$

Sia $p=([0,0,1],[0,0,1])$. Si calcoli $H_i(X, X\setminus\{p\};\mathbb{Z})$.

2. Sia $\alpha : [0,2]\to\mathbb{C}$ data da

$$\alpha(t) \;=\; 8t\,(t-1)\,(t-2) \;+\; i\sin(2\pi t)$$

e sia

$$f(z) \;=\; \frac{(z+1)^2}{(z-1)\,(z-i)}\,.$$

Si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha f(z)\,dz\,, \qquad\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\,.$$

3. Si consideri la funzione

$$\mathbf{x} : (0,+\infty)\times\mathbb{R}\ni(t,\theta) \;\mapsto\; \begin{pmatrix} t\cos\theta \\ t\sin\theta \\ \theta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,.$$

Si provi che $\mathbf{x}$ parametrizza una superficie S. Si dimostri che S ha ovunque curvatura media nulla. Si trovino le linee di curvatura e le linee asintotiche di S.

4. Nell'anello $\mathbb{Z}[x]$ si consideri l'ideale I generato da 7 e da x^3+9. Si provi che I è massimale.

5. Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica a coefficienti complessi, di rango $n-1$ e tale che

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia A^{ij} la sottomatrice di A ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima. Si provi che $(-1)^{i+j}\det(A^{ij})$ non dipende da i e da j.

6. Sia X uno spazio topologico connesso che ammetta rivestimento universale, sia $f : X \to X$ un omeomorfismo e sia Y il quoziente di $X \times [0,1]$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ generata da $(x,0) \sim (f(x),1)$ per ogni x in X. Si dimostri che $\pi_1(Y)$ è un prodotto semidiretto di $\pi_1(X)$ e $\mathbb{Z}$.

Anno accademico 2005–2006

Risolvere il maggior numero possibile di esercizi a scelta tra i seguenti:

1. Sia E la curva affine definita $y^2 = x^3 - 1$. Dimostrare che:

   (a) rimuovendo i punti reali $E(\mathbb{R})$ dal piano affine reale $\mathbb{R}^2$ si ottiene uno spazio sconnesso, con due componenti connesse.

   (b) Rimuovendo la chiusura di E nel piano proiettivo reale si ottiene uno spazio connesso.

   (c) Rimuovendo l'insieme dei punti complessi $E(\mathbb{C})$ dal piano affine complesso si ottiene uno spazio connesso.

   (d) Gli spazi $E(\mathbb{R})$ ed $E(\mathbb{C})$ sono connessi.

2. Sia G un sottogruppo finito di $Aut(\mathbb{P}_1)_k = PGL_2(k)$ dove k è un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0.

   (a) Dimostrare che se esiste un punto fisso comune agli elementi di G allora G è ciclico. E' ancora vero in caratteristica $p > 0$?

   (b) Sia $K = k(t,x) = k(x)$ l'estensione di $k(t)$ determinata da una radice x di $f(X) = t$ dove $f \in k[X]$ è un polinomio di grado $d > 1$ e t è un'indeterminata su k. Determinare il gruppo di Galois della chiusura di Galois di K su $k(t)$ quando $f(X) = X^3 + X$.

   (c) Supponendo che $K/k(t)$ sia di Galois dimostrare che il gruppo di Galois è ciclico e che con opportune sostituzioni lineari f si può scrivere nella forma $ax^d + b$.

3. (a) Sia A una matrice $n \times n$, con n pari, i cui elementi sulla diagonale sono interi pari, mentre tutti gli altri sono interi dispari. Dimostrare che il determinante di A non è nullo.

   (b) Siano $x_1, \dots, x_{2n+1}$ numeri reali con la seguente proprietà: comunque se ne scelgano $2n$, è possibile dividerli in due gruppi di n elementi in modo tale che le due somme coincidano. Dimostrare che i numeri $x_1, \dots, x_{2n+1}$ sono tutti uguali.

4. (a) Sia C un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di palle aperte $\{B_i\}$ che ricopre C ed i cui raggi soddisfano $\sum r_i \leq \varepsilon$.

   (b) Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus C$ è connesso per $n \geq 2$.

   (c) Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus C$ è semplicemente connesso per $n \geq 3$.

5. Si consideri una superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$ data in forma parametrica

$$\begin{aligned} x_1 &= u \cos v\,, \\ x_2 &= u \sin v\,, \\ x_3 &= \psi(u)\,, \end{aligned}$$

dove $u \in (0, +\infty)$, $v \in [0, 2\pi]$ e ψ è una funzione positiva di classe almeno C^2.

   (a) Scrivere la prima forma fondamentale della superficie.

   (b) Scrivere l'equazione delle geodetiche sulla superficie.

   (c) Si consideri una geodetica $s \mapsto (u(s), v(s))$ sulla superficie e si supponga che s sia il parametro naturale. Si dimostri che se $\alpha(s)$ è l'angolo tra il versore tangente alla geodetica nel punto $(u(s), v(s))$ e il meridiano (curva $v =$costante) passante per quel punto, la funzione $s \mapsto u(s) \sin \alpha(s)$ è costante.

   (d) Calcolare la curvatura Gaussiana della superficie.

Anno accademico 2006–2007

1. Sia $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ l'identificazione naturale data da

$$\varphi(x_1+iy_1, x_2+iy_2, \ldots, x_n+iy_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) .$$

Data $A_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$, sia $A_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Gl}(2n,\mathbb{R})$ l'unica matrice a coefficienti reali tale che $A_{\mathbb{R}} \cdot \varphi(v) = \varphi(A_{\mathbb{C}} \cdot v)$ per ogni $v \in \mathbb{C}^n$. Si mostri che $\det A_{\mathbb{R}} = |\det A_{\mathbb{C}}|^2$.

2. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^∞ e si consideri l'insieme $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : z = f(x) + g(y)\}$. Si mostri che S è una superficie differenziabile. Si mostri che la curvatura Gaussiana di S è identicamente nulla se e solo se almeno una tra f e g è una mappa affine.

3. Sia $n > 1$, sia S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1,2,\ldots,n\}$, e sia H un sottogruppo di S_n. Si supponga che per ogni i, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ esista $g \in H$ tale che $g(i) = j$. Si provi che esiste $g \in H$ tale che $g(i) \neq i$ per ogni $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

4. Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0 e sia $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo.

   (a) Si mostri che $X^n + Y^n + Z^n \in \mathbb{K}[X,Y,Z]$ è irriducibile.

   (b) Si provi che, se $n \geq 3$, l'equazione (di Fermat) $X^n + Y^n + Z^n = 0$ non ha soluzioni in polinomi $X, Y, Z \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$ che siano coprimi e non tutti costanti.

   (c) Si dimostri che, se $\sqrt{-1} \in \mathbb{K}$, allora per $n = 2$ l'equazione di Fermat ha soluzioni in polinomi coprimi non tutti costanti.

   (d) Si esibisca un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica 0 con le seguenti proprietà: $\sqrt{-1} \notin \mathbb{K}$, ed esistono $a, b, c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

5. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che esiste $z \in \mathbb{C}$ per cui $f(z)$ è un numero reale.

   Dimostrare anzi che l'insieme $\mathbb{C} \setminus \{z : \Im f(z) = 0\}$ è un aperto sconnesso di $\mathbb{C}$, che per di più è denso in $\mathbb{C}$.

6. Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ così definito:

$$E = \left\{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : zy^2 = x^3 - z^3 \right\} .$$

Dimostrare che E è omeomorfo alla circonferenza S^1.

Anno accademico 2007–2008

1. Si consideri la matrice reale $n \times n$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovate tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^n$ che sono invarianti per A, ossia i sottospazi $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $AV \subseteq V$.

2. Esistono dei sottogruppi di $\mathbb{Q}$ che sono finitamente generati ma non ciclici? E di $\mathbb{R}$? E di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$? In ciascun caso si dia una dimostrazione o un controesempio.

3. Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Si diano delle condizioni necessarie e sufficienti perché la funzione

$$\frac{f(z)}{z^2 - 1}$$

abbia una primitiva su $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ e su $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

4. Sia C il cilindro $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\}$. Consideriamo le due relazioni di equivalenza R ed R' su C che identificano ogni punto (x, y, z) di C tale che $x^2 + y^2 = 1$ con i punti $(-x, -y, z)$ e $(-x, -y, -z)$ rispettivamente. Si mostri che i quozienti C/R e C/R' non sono omeomorfi.

5. Sia m un intero positivo. Si trovi una condizione necessaria e sufficiente su m affinché l'ideale $(m, x^2 + y^2)$ nell'anello $\mathbb{Z}[x, y]$ sia primo.

6. Si mostri che una curva regolare in $\mathbb{R}^3$ a curvatura costante che sta su una sfera giace in effetti su una circonferenza.

   Cenno di soluzione: sia $\gamma\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione mediante la lunghezza d'arco della nostra curva; possiamo assumere the $|\gamma(s)|$ sia costante. Si esprima $\gamma(s)$ in termini del riferimento di Frenet $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ e si differenzi questa identità.

Anno accademico 2008–2009

1. Data una superficie Σ immersa in $\mathbb{R}^3$ si indichino con Σ_+ (rispettivamente, Σ_-) i sottoinsiemi di Σ costituiti dai punti nei quali la curvatura gaussiana è strettamente positiva (rispettivamente, strettamente negativa). Per ciascuna delle seguenti situazioni si dimostri che è impossibile oppure si dia una descrizione qualitativa di una sua realizzazione:

   (a) Σ chiusa (compatta e senza bordo) e $\Sigma_+ = \emptyset$;

   (b) $\Sigma \cong S^2$ (dove $\cong$ indica la relazione di diffeomorfismo), $\overline{\Sigma}_+ \cong D^2 \sqcup D^2$ e $\overline{\Sigma}_- \cong D^1 \times S^1$;

   (c) $\Sigma \cong S^2$ e $\overline{\Sigma}_+ \cong \overline{\Sigma}_- \cong D^2$;

   (d) $\Sigma \cong S^2$, $\overline{\Sigma}_+ \cong D^1 \times S^1$ e $\overline{\Sigma}_- \cong D^2 \sqcup D^2$.

2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si prenda l'insieme X definito dall'equazione $(x^2+y^2)\cdot(x^2+z^2)\cdot(y^2+z^2)\cdot(x^2+y^2-1)=0$. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come un sottoinsieme della sua compattificazione di Alexandrov S^3 e dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Si indichino con Y la chiusura di X in S^3 e con Z quella in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Si determini il gruppo fondamentale degli spazi X, Y e Z e di ciascuna delle componenti connesse dei loro complementari.

3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si verifichi che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2(k-1) & 0 & 4 \\ 3-k & k+2 & 2-k & 2(k-3) \\ 1 & 0 & k & -2 \\ -k & k-1 & 0 & 2(k+1) \end{pmatrix}$$

   ha autovalori $2, k+2, k, 2k$ e si esibisca la sua forma canonica di Jordan.

4. Siano G un gruppo finito e p un intero primo. Si mostri che se G ha due sottogruppi distinti di ordine p allora ne ha almeno $p+1$.
   Suggerimento: Siano H_1 e H_2 due sottogruppi di ordine p. Ci sono due casi possibili; H_2 è contenuto nel normalizzatore di H_1, oppure no. Nel secondo caso si consideri l'azione per coniugio sull'insieme dei sottogruppi di ordine p.

5. Siano m ed n due interi positivi relativamente primi. Si dimostri che il polinomio x^n-2 è irriducibile sul campo $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{2})$.

6. Siano A e B due matrici reali $n \times n$, simili come matrici complesse. Ne segue che sono simili come matrici reali?

Anno accademico 2009–2010

1. Sia S_1 il cerchio unitario nel piano reale affine: $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}$.

   Sia $D_2 \subset S_1^2$ la 'diagonale': $D_2 = \{(P,P) : P \in S_1\}$; sia poi $D_3 \subset S_1^3$ la diagonale generalizzata costituita dalle terne $(P,Q,R) \in S_1^3$ in cui almeno due tra P, Q, R coincidono.

   (i) Dimostrare che $S_1^2 \setminus D_2$ è connesso.

   (ii) Dimostrare che $S_1^3 \setminus D_3$ ha due componenti connesse.

   (Facoltativo: generalizzare il risultato.)

2. Sia Z la chiusura di Zariski in A^4 dell'insieme $\{(n, 2^n, 3^n, 6^n)\}$, per $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Determinare la dimensione di Z (su $\mathbb{C}$) e scrivere esplicitamente generatori per il suo ideale in $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$.

   (ii) Stesse domande per l'insieme $\{(5^n, (2+\sqrt{-1})^n)\}$.

   (iii) Stesse domande per l'insieme $\{(2^n, (1+\sqrt{-1})^n)\}$.

3. Sia E la curva piana affine definita $y^2 = x^3 - 1$. Dimostrare che:

   (i) rimuovendo i punti reali $E(\mathbb{R})$ dal piano affine reale $\mathbb{R}^2$ si ottiene uno spazio sconnesso, con due componenti connesse;

   (ii) rimuovendo la chiusura di E nel piano proiettivo reale si ottiene uno spazio connesso;

   (iii) rimuovendo l'insieme dei punti complessi $E(\mathbb{C})$ dal piano affine complesso si ottiene uno spazio connesso;

   (iv) gli spazi $E(\mathbb{R})$ ed $E(\mathbb{C})$ sono connessi;

   (v) la chiusura di $E(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ è omeomorfa al cerchio S_1.

4. Sia G un sottogruppo finito di $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_1)_k = PGL_2(k)$ dove k è un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0. Dimostrare che se esiste un punto fisso comune agli elementi di G allora G è ciclico.

   L'enunciato è ancora vero in caratteristica $p > 0$?

5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e dotato di prodotto scalare. Un sottoinsieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V si dice un *tight frame* se, per ogni $x \in V$,

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle^2 \, .$$

   (i) Si dimostri che, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un tight frame di V, allora $n \geq \dim V$.

   (ii) Si dimostri che un sottoinsieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V è un tight frame se e solo se, per ogni $x \in V$,

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j = x \, .$$

   (iii) Sia $A : V \to \mathbb{R}^n$ una isometria lineare e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Si dimostri che gli elementi $v_j = {}^t\!A\, e_j$ formano un tight frame di V.

   (iv) Si dimostri che la costruzione al punto (iii) consente di ottenere tutti i tight frame di V.

Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Prova di Analisi per l'ammissione alla Laurea Specialistica in Fisica applicata, Informatica, Matematica, Scienze fisiche, Tecnologie informatiche

Anno accademico 2003–2004

1. Siano p e q due numeri reali non negativi. Si dica *quante* soluzioni (al variare di p e q) ha l'equazione
$$p^x = x^q \, .$$

2. Studiare qualitativamente il comportamento delle orbite del sistema differenziale
$$\begin{cases} x' &= x - y + x^2 - xy \\ y' &= -y + x^2 \end{cases}$$

3. Sia $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, $f = f(x)$. Posto $g = -ixf$, si supponga che g appartenga a $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$.

   i) Provare che $\widehat{f}$, la trasformata di Fourier di f, è derivabile e che $\mathrm{D}\widehat{f} = \widehat{g}$.

   ii) Verificare che, se $f = e^{-x^2/2}$, allora $\widehat{f} = f$.

4. Sia φ una funzione misurabile su $[0,1]$ e si supponga che la trasformazione lineare
$$A : f \longrightarrow \varphi \cdot f$$
applichi $\mathbf{L}^2[0,1]$ in sé.

   i) Provare che $\varphi \in \mathbf{L}^\infty[0,1]$;

   ii) calcolare la norma dell'operatore A;

   iii) dire sotto quali ipotesi su φ l'operatore A è surgettivo, è invertibile, l'inverso è continuo.

Anno accademico 2004–2005

1. Si studi la convergenza nel campo reale della serie di funzioni

$$S(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \sin\frac{x}{5^n}$$

e si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x}\,.$$

2. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse z il cerchio

$$\{(x,y,z)\,:\, y=0\,,\; x^2+z^2-4x-6z+8\le 0\}\,.$$

3. Sia $\alpha\in(0,1)$ e si denoti con $C^{0,\alpha}([0,1])$ lo spazio delle funzioni a valori reali α-Hölderiane in $[0,1]$, munito della norma

$$\|f\|_\alpha \;=\; \sup_{[0,1]}|f| + \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\,.$$

Si consideri il sottospazio

$$E \;:=\; \left\{ f\in C^{0,\alpha}([0,1])\,:\, \lim_{r\downarrow 0}\sup_{0<|x-y|<r}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \;=\; 0 \right\}.$$

Si mostri che E è un sottospazio chiuso e che $C^1([0,1])$ è denso in E.

4. Per $1\le p<\infty$, si denoti con $L^p(0,1)$ lo spazio delle funzioni Riemann integrabili aventi potenza p-sima integrabile. Per $p=\infty$ si denoti con $L^\infty(0,1)$ lo spazio delle funzioni Riemann integrabili in $(0,1)$ e limitate. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 1-periodica, tale che $f\in L^p(0,1)$ per un certo $p\in[1,\infty]$. Posto $f_\varepsilon(x)=f(x/\varepsilon)$, si mostri che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^1 f_\varepsilon g\,dt \;=\; \int_0^1 f\,dt\int_0^1 f\,dt \qquad\qquad \forall g\in L^{p'}(0,1)\,,$$

ove $p'=p/(p-1)$ se $p>1$ e $p'=\infty$ se $p=1$.

5. Sia H uno spazio di Hilbert reale e sia $\{e_n\}_{n\ge 1}$ una successione di vettori di H a due a due ortogonali, tali che il limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\, e_i$$

esiste per ogni $x\in H$. Si mostri che $\sup_n\|e_n\|<+\infty$. Si dica anche se tale conclusione vale ancora se non si suppone l'ortogonalità a due a due dei vettori.

Anno accademico 2005–2006

Risolvere il maggior numero possibile di esercizi a scelta tra i seguenti:

1. Sia $x > 0$. Calcolare
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x^2 + \sin^2\theta}\, d\theta\ .$$

2. Data A matrice simmetrica $n \times n$, si consideri il sistema del secondo ordine
$$\ddot{x} + Ax = 0\ . \qquad (*)$$
   (a) Per quali A le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate?
   (b) Per quali A le soluzioni di $(*)$ sono tutte periodiche?
   (c) Rispondere alle domande precedenti senza l'ipotesi che A sia simmetrica.

3. (a) Sia $n > 1$ un numero intero. Dimostrare che per ogni funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 con supporto compatto si ha
$$\sum_{1\le i,j\le n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u(x)|^2\, dx\ , \qquad (*)$$
   dove Δ è l'operatore di Laplace.
   (b) L'enunciato (a) resta vero rimuovendo l'ipotesi che u abbia supporto compatto?

4. Indichiamo con e^A l'esponenziale della matrice quadrata A, vale a dire
$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\ .$$
   (a) Dimostrare che $e^{A+B} = e^A e^B$ se A e B commutano.
   (b) Far vedere con un esempio che in generale $e^{A+B} \ne e^A e^B$.
   (c) Dimostrare che per ogni A, B
$$e^{A+B} = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{A/n} e^{B/n}\right)^n\ .$$

5. Sia $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Indichiamo con D_ω l'operatore $\omega \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}$. Sia $V(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \cos(x_1 - k x_2)$.
   (a) Determinare tutte le soluzioni reali doppiamente periodiche (cioè 2π-periodiche sia in x_1 che in x_2) appartenenti a $\mathbf{L}^2([0,2\pi] \times [0,2\pi])$ dell'equazione $D_\omega^2 u = V$.
   (b) Discutere la regolarità delle soluzioni trovate.

6. (a) Sia $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dimostrare che esiste un intervallo in cui f è monotona.
   (b) Dimostrare che esiste una successione strettamente crescente di numeri interi positivi a_n tali che la funzione continua
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(a_n x)$$
   non è monotona su alcun intervallo.

(c) Sia $C(0,2\pi)$ lo spazio delle funzioni continue $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, dotato della norma del sup. Dimostrare che l'insieme delle funzioni in $C(0,2\pi)$ che non sono monotone su alcun intervallo è denso in $C(0,2\pi)$.

Anno accademico 2006–2007

1. Sia $\alpha \in (0,1)$.

   (a) Provare che esiste $c_\alpha > 0$, indipendente da t e s, tale che
   $$\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-s)^{-\alpha}d\sigma = c_\alpha\,, \quad 0\le s\le t, \tag{1}$$

   (b) Calcolare $c_{1/2}$.

   (c) Trovare una formula risolutiva per la soluzione x dell'equazione
   $$\int_0^t (t-s)^{-1/2}x(s)ds = f(t), \quad t\in[0,1], \tag{2}$$
   dove f è una funzione assegnata di classe $C^1([0,1])$ e tale che $f(0)=0$.

2. Si consideri la funzione
   $$\varphi(x) = |x-x_0|, \quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}\,,$$
   dove $x_0\in\mathbb{R}^n$ è fissato.

   (a) Calcolare la matrice Hessiana $D^2\varphi(x)$ di φ in ogni punto $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}$.

   (b) Supposto $|x-x_0|=1$, calcolare gli autovalori di $D^2\varphi(x)$ e descriverne i corrispondenti autovettori.

3. Si consideri la serie
   $$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\,.$$

(a) Dimostrare la divergenza della serie.

(b) Dimostrare l'esistenza del limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\log n\right) = \gamma < +\infty\,.$$

(c) Dimostrare che ogni numero razionale positivo è la somma di un numero finito di termini distinti della serie.

4. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,dx\,.$$

5. Sia n un intero non negativo, e sia $a>0$. Calcolare l'integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^n e^{-ax^2}\,dx\,.$$

6. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = y\,(x+y)^n\\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x\,(x+y)^n\end{cases}\qquad\begin{cases}x(0) = 1\\ y(0) = 0\end{cases}$$

7. Sia $a:[0,1]\to[0,\infty[$ una funzione tale che:

(a) $a\in C([0,1])\cap C^1(]0,1])$, $a(0)=0$, $a>0$ in $]0,1]$;

(b) esiste $K>0$ per cui si ha $x\,a'(x)\le K\,a(x)$ per ogni $x\in]0,1]$.

Si provi che
$$\int_0^1\frac{dx}{(a(x))^{\frac{1}{[K]+1}}} < +\infty\,.$$

8. Sia $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ una funzione concava. Si provi che se $f(0)\ge 0$ allora
$$f(x+y)\le f(x)+f(y)\qquad\forall x,y\ge 0\,.$$

Anno accademico 2007–2008

1. Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da:

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \le 1, \\ \dfrac{x}{|x|} & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

   (a) Si mostri che

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le |x-y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

   (b) Si dica in quali punti ϕ è differenziabile e se ne calcoli ivi il differenziale.

2. Sia $H = L^2(0,1)$ lo spazio di Hilbert delle classi di equivalenza di funzioni di Borel definite in $[0,1]$ e aventi quadrato integrabile (munito del prodotto scalare usuale). Sia $F : H \to H$ la funzione:

$$(F(x))(\xi) = \sin(x(\xi)) \qquad \xi \in [0,1] .$$

   (a) Si mostri che F è, in ogni punto $x \in H$, differenziabile nel senso di Gateaux, vale a dire:

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{F(x+hy) - F(x)}{h} = \nabla F(x)(y) \qquad \forall y \in H$$

   e $\nabla F(x)$ è un funzionale lineare e continuo da H in H.

   (b) Si mostri che F non è differenziabile nel senso di Frechet in $x = 0$, vale a dire

$$\limsup_{y\to 0} \frac{\|F(y) - F(0) - \nabla F(0)y\|}{\|y\|} > 0 .$$

3. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Si risolva l'equazione integrale

$$u(t) = f(t) + a\int_0^t u(s)ds, \qquad t \ge 0,$$

   trovando una formula esplicita per la soluzione.

4. Per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ si consideri l'operatore lineare $T_g : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito nel modo seguente:

$$T_g(f) \;=\; g\,f .$$

   Si dimostri che T_g è compatto (ovvero manda insiemi chiusi e limitati in insiemi compatti) se e solo se $g(x) = 0$ per quasi ogni x.

5. Sia $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, con derivata prima limitata.

   (i) Si mostri, anche applicando risultati noti, che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ l'equazione differenziale ordinaria $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$, con la condizione di Cauchy $\gamma(0) = x$, ha un'unica soluzione di classe C^2 definita su tutta la retta reale.

   (ii) Detta $X(t,x)$ la soluzione del punto (i), si mostri che vale la proprietà di semigruppo

$$X(s+t,x) = X(s, X(t,x)) \qquad \forall s,t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Si mostri che la mappa $x \mapsto X(t,x)$ è di classe C^1, e che il suo gradiente rispetto a x soddisfa il sistema di equazioni differenziali lineari
$$\frac{d}{dt}\nabla_x X(t,x) = \nabla V(X(t,x))\nabla_x X(t,x).$$
Suggerimento: si consideri l'equazione soddisfatta dai rapporti incrementali di $X(t,x)$ in una direzione fissata.

(iv) Si deduca da (ii), (iii) che la funzione $\Delta(t,x) = \det \nabla_x X(t,x)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria
$$\frac{d}{dt}\Delta(t,x) = \operatorname{div} V(t,X(t,x))\Delta(t,x).$$

6. Sia $(f_h) \subset L^1(\mathbb{R}^2)$ una successione convergente in $L^1(\mathbb{R}^2)$ a 0. Si mostri che esiste una sottosuccessione $h(k)$ tale che $f_{h(k)}(x,\cdot)$ converge a 0 in $L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni x.

Anno accademico 2008–2009

1. Siano f, g funzioni definite in un intorno dell'origine nella retta reale, con g mai nulla. Si mostri che per ogni $L \in [-\infty, +\infty]$ e per ogni funzione non negativa ρ a supporto compatto, con $\int_{\mathbf{R}} \rho\, dy = 1$, vale
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{r\to 0}\frac{\int_{\mathbf{R}} f(ry)\rho(y)\,dy}{\int_{\mathbf{R}} g(ry)\rho(y)\,dy} = L.$$

2. Si calcoli il volume del simplesso
$$\Big\{x \in \mathbf{R}^n : \min_{1\le i\le n} x_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\Big\}.$$

3. Sia (x_n) una successione reale. Si mostri che esiste una sottosuccessione $(x_{n(k)})$ monotona.

4. Sia $u : [0,\pi]\times[0,+\infty)$ una funzione continua, di classe C^1 in $[0,\pi]\times(0,+\infty)$ e di classe C^2 in $(0,\pi)\times(0,+\infty)$ soddisfacente l'equazione del calore
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t)$$
con le condizioni al contorno $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ per tutti i $t > 0$. Si determini una formula di rappresentazione di u, mostrando che, in opportuni spazi funzionali, $\lim_{t\to+\infty} u(\cdot,t)$ è la funzione costante $\pi^{-1}\int_0^\pi u(x,0)\,dx$.

5. Sia $M^{n\times n}$ lo spazio delle matrici reali $n\times n$, sia $T>0$ sia $A:[0,T]\to M^{n\times n}$ continua. Sia $C:[0,T]\to M^{n\times n}$ una soluzione del sistema di equazioni differenziali $C'(t)=A(t)C(t)$. Si determini l'equazione differenziale soddisfatta dalla funzione $\det C(t)$ e la si usi per mostrare che il determinante ha segno costante in $[0,T]$.

6. Denotiamo con Δ il disco aperto unitario con centro l'origine in $\mathbb{C}$.

   (a) Si dimostri che, per ogni $a\in\mathbb{C}$ con $|a|<1$, la funzione
   $$\varphi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$
   applica biiettivamente $\bar{\Delta}$ su di sé.

   (b) Si dimostri che, se f è olomorfa in un dominio D di $\mathbb{C}$ contenente $\bar{\Delta}$, $|f(z)|<1$ per $|z|<1$, ed esiste $z_0\in\Delta$ tale che $f(z_0)=f(-z_0)=0$, allora $|f(0)|\le|z_0|^2$.

   (c) Si determinino le funzioni f soddisfacenti le ipotesi in (b) per cui vale l'uguaglianza $|f(0)|=|z_0|^2$.

Anno accademico 2009–2010

1. Data una curva chiusa di classe C^1 in $\mathbb{C}$ di lunghezza 2π, se ne considerino le possibili parametrizzazioni regolari, tra loro equivalenti, attraverso un parametro $t\in[0,2\pi]$.

   Sia $\gamma(t)$ una di queste parametrizzazioni, e sia $\gamma(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_ne^{int}$ il suo sviluppo di Fourier. Si dimostri che $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|a_n|^2\ge 1$ e che vale l'uguaglianza se e solo se γ è la parametrizzazione riferita alla lunghezza d'arco.

2. Dato un parametro $\alpha>0$, si consideri la successione di funzioni
   $$f_n(x)=(1+x)\left(1+\frac{x}{2^\alpha}\right)^2\cdots\left(1+\frac{x}{n^\alpha}\right)^n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k^\alpha}\right)^k.$$
   Si dimostri che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (i) esiste $x>0$ tale che $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ sia finito;

   (ii) esiste $x<0$, $x\ne-n^\alpha$ per ogni n, tale che $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ sia diverso da 0;

   (iii) $\alpha>2$;

   (iv) la successione converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$.

3. Si dimostri che, dato $x_0\ne 0$, il problema di Cauchy
   $$\begin{cases} x' = \dfrac{t+x^2}{t-x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
   ammette soluzione unica in un intorno di $t=0$, e che tale soluzione non è prolungabile a ogni $t>0$ (non è richiesta la discussione per $t<0$).

4. (i) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{y}$ ammette un'estensione continua a $\mathbb{R}^2$.

   (ii) Si supponga ora $n \geq 2$ e $f \in C^n(\mathbb{R}^2)$ con $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si dimostri che g ammette un'estensione C^{n-1} a $\mathbb{R}^2$.

5. Sia $I = [0,1]$. Si calcoli l'integrale

$$\int_{I^n} \left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^\alpha dx \,,$$

al variare di α in $\mathbb{R}$.

Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Prova di Chimica Fisica per l'ammissione alla Laurea Specialistica in Chimica, Chimica Industriale, Scienze Geologiche, Gestione e Valorizzazione delle Risorse Naturali

Anno accademico 2004–2005

1. Data una molecola biatomica, costituita da due nuclei di massa M_1, M_2 ad una distanza di equilibrio R_e, assumendo che l'energia elettronica dello stato fondamentale di tale molecola dipenda dalla distanza internucleare nel modo seguente: $E(R) = {}^1/_2\, K\,(R - R_e)^2$,

   CALCOLATE

   a) la struttura dei livelli vibrazionali e rotazionali associati allo stato elettronico fondamentale di tale molecola;
   b) le intensità di transizione tra tali stati, identificando eventuali regole di selezione;
   c) possibili transizioni ad altri stati elettronici, assumendo che lo stato elettronico fondamentale sia di tipo ${}^1\Sigma$.

   DISCUTETE

   i) le approssimazioni fatte nei calcoli precedenti, proponendo eventuali miglioramenti;
   ii) il caso particolare di una molecola biatomica omonucleare.

2. Costruite il diagramma di fase (P/T) di H_2O definendo e risolvendo (anche in modo approssimato) le equazioni che permettono di determinare la pendenza delle linee di confine tra le fasi.

Anno accademico 2005–2006

1. Considerate una pila Weston

$$Hg/Hg_2SO_{4\,(s)}//CdSO_{4(sol\;aq.)}/\text{amalgama di Cd}$$

   e discutete l'andamento del potenziale tra i capi della pila e agli estremi di una resistenza in serie alla pila, quando il circuito è aperto e quando fluisce corrente attraverso la resistenza.

2. Elencate almeno 3 molecole che abbiano sia spettro di assorbimento rotazionale che vibrazionale ed altre che abbiano solo spettro di assorbimento vibrazionale. Ricavate un'espressione appropriata per i livelli rotazionali della molecola di ammoniaca.

3. Stimate la frequenza di collisioni interatomiche di un atomo di Ar in una mole di Ar contenuta in un volume di 50 dm^3 a $T = 450$ K.

Anno accademico 2006–2007

1. I potenziali di prima e di seconda ionizzazione dell'atomo di Li sono rispettivamente di 0.1981 e 2.7797 hartree (1 hartree $= 1\,m\,e^4/2\hbar^2$). Calcolare l'energia totale dell'atomo di Li (si consideri nulla l'energia del nucleo più gli elettroni posti tutti a grande distanza uno dall'altro, e a riposo).

2. Considerare tutti i possibili isomeri o conformeri del divinildiazene, $CH_2 = CH - N = N - CH = CH_2$. Formulando ragionevoli ipotesi sulle loro geometrie di equilibrio, rispondere per ciascuno di essi alle seguenti domande:

   (A) Quale gruppo di simmetria rappresenta la geometria della molecola?

   (B) Qual è la rappresentazione irriducibe dello stato elettronico di singoletto eccitato di più bassa energia (si assuma che l'orbitale occupato di più alta energia sia la combinazione dei doppietti liberi sugli atomi di azoto, con segni uguali per gli isomeri a configurazione *trans* del doppio legame $N = N$, e con segni opposti per la configurazione *cis*)?

   (C) E' permessa o proibita per simmetria la transizione dallo stato fondamentale al primo singoletto eccitato?

3. In uno stagno la superficie dell'acqua assorbe ossigeno dall'aria, con un flusso che segue la legge:

$$\Phi_0 \;=\; K_{aw}\,(C_{eq} - C_0)$$

dove $C_q = 2.6 \cdot 10^{-4}$ mol/L è la concentrazione di equilibrio con l'aria, C_0 è la concentrazione nello strato di acqua più superficiale e $K_{aw} = 10^{-4}$ m/s. L'ossigeno diffonde nell'acqua secondo la legge di Fick:

$$\Phi(z) = -D\frac{\partial C}{\partial z}$$

dove z è la distanza dalla superficie e $D = 10^{-4}$ m^2/s (valore che indica la presenza di moderato rimescolamento dell'acqua in senso verticale). Reazioni di ossidazione consumano l'ossigeno con velocità pari a $K_{ox}C(z)$, con $K_{ox} = 10^{-4}$ s^{-1}. Trovare la legge che esprime la concentrazione C in funzione di z. A quale profondità la concentrazione si riduce a meno di $5 \cdot 10^{-5}$ mol/L?

4. Calcolare la pressione di vapore saturo del durene (1,2,4,5-tetrametilbenzene) solido a 25 ºC, dai seguenti dati di pressioni di vapore ad altre temperature, temperatura di fusione ed entropia di fusione:
$P_{vap} = 40$ mmHg a $T = 104.2$ ºC
$P_{vap} = 100$ mmHg a $T = 128.1$ ºC
$T_f = 79.5$ ºC
$\Delta S_f = 56.0$ J mol^{-1} K^{-1}.

5. Considerare la reazione $2\mathrm{X} \rightleftarrows \mathrm{X}_2$, con monomero e dimero entrambi gassosi. All'equilibrio, $T = 300$ K e $P = 1$ atm, una mole di X, parzialmente dimerizzato, occupa il volume di 15 L. A $T = 400$ K, stessa pressione, il gas occupa 25 L. Che volume occupa a 500 K?

6. Un campione di Na_2 gassoso presenta un rapporto tra le popolazioni dei primi due stati vibrazionali pari a $P(v = 1)/P(v = 0) = 0.50 \pm 0002$. Analogamente, per gli stati rotazionali si trova $P(J = 50)/P(J = 0) = 20 \pm 3$. Data la distanza internucleare $R_c = 3.0789$ *mathrmÅ* e la frequenza vibrazionale $\omega_v = 159.12$cm^{-1}, ricavare la temperatura dalle popolazioni vibrazionali e da quelle rotazionali. Le due temperature sono *significativamente* diverse?

Valori numerici di costanti fisiche e fattori di conversione.

- Costante dei gas: $R = 0.08206$ L atm/K $= 8.3145$ J mol^{-1} K^{-1} $= 0.0019872$ kcal mol^{-1} K^{-1}
- Costante dei gas: $R = 0.08206$ L atm/K $= 8.3145$ J mol^{-1} K^{-1} $= 0.0019872$ kcal mol^{-1} K^{-1}
- Costante dei gas: $R = 0.08206$ L atm/K $= 8.3145$ J mol^{-1} K^{-1} $= 0.0019872$ kcal mol^{-1} K^{-1}
- Costante di Planck: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s; $\hbar = h/2\pi = 1.0546 \cdot 10^{-34}$ J s.
- Costante di Boltzmann: $K_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}
- Numero di Avogadro: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$
- Conversione di grandezze energetiche: 1 kJ/mol = 83.59 cm^{-1}, 1 hartree = 2625.5 kJ/mol
- Conversione di distanze: 1 bohr = 0.529171 Å
- Pesi atomici:

H,	1.008;	Li,	6.941;	Be,	9.012;	B,	10.811;
Ci,	12.011;	N,	14.007;	O,	15.999;	F,	18.998;
No,	22.990;	Mg,	24.305;	Al,	26.982;	Si,	28.086;
P,	30.974;	S,	32.066;	Cl,	35.453;	K,	39.098;
Ca,	40.078;	Br,	79.904;	Rb,	85.468;	Sr,	87.62.

Anno accademico 2007–2008

1. Calcolare la pressione di vapore saturo del durene (1,2,4,5-tetrametilbenzene) solido a 25 °C, dai seguenti dati: pressione di vapore ad altre temperature, temperatura di fusione ed entropia di fusione:

   $P_{\mathrm{vap}} = 40$ mmHg a $T = 104.2$ °C

   $P_{\mathrm{vap}} = 100$ mmHg a $T = 128.1$ °C

   $T_{\mathrm{f}} = 79.5$ °C

   $\Delta S_{\mathrm{f}} = 56.0\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$

2. Spiegare perche un campo magnetico esterno può modificare l'equilibrio termodinamico della reazione in fase gassosa: $\mathrm{I_2} \rightarrow 2\,\mathrm{I}(^2\mathrm{P}_{3/2})$. Calcolare di quale fattore aumenta la costante di equilibrio se si applica un campo di 100 tesla ($1\text{tesla} = 4.2 \cdot 10^{-6}$a.u.), a 1000 K. Il rapporto tra momento magnetico e momento angolare nel caso dello stato $^2P_{3/2})$ è pari a $4/3$.

3. Utilizzando le proprietà di simmetria della molecola di benzene, stimate la struttura degli orbitali molecolari di valenza di tale molecola, i relativi livelli energetici e le probabilità di transizione tra tali livelli.

Anno accademico 2009–2010

1. La reazione di formazione di un estere secondo la reazione:

   $$\mathrm{R-COOH} \; + \; \mathrm{P-OH} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{R-CO-O-P} \; + \; \mathrm{H_2O}$$

   è catalizzata da acidi.
   Scrivere una espressione della velocità di reazione a partire da una soluzione 1 molare dei due reagenti nei seguenti casi:

   (a) la reazione è autocatalitica;

   (b) sono stati aggiunti 0.01 moli/litro di HCl (trascurare la variazione di volume).

   Confrontare infine la conversione in estere nei due casi quando la reazione sia stata condotta per un tempo t in ambedue le condizioni iniziali.

2. L'etilene ed il benzene hanno molecole planari, che vengono convertite in molecole non planari per idrogenazione esaustiva.
   Scrivere per ambedue le reazioni le equazioni di reazione, descrivendo la struttura geometrica dei prodotti, le trasformazioni dei legami ed impostare il bilancio energetico.

3. Ipotizzando che alla temperatura assoluta T_1 la costante di equilibrio tra anidride solforica e solforosa sia K, scrivere una espressione che permetta di calcolare la pressione totale esercitata da una miscela che contiene inizialmente una mole di anidride solforica in un recipiente di volume V alla temperatura T_1.

Inoltre, assumendo che l'entalpia di reazione H sia costante con la temperatura, scrivere una espressione che permetta di calcolare la pressione totale alla temperatura T_2 maggiore di T_1.

4. Descrivere, in maniera qualitativa ed almeno in parte quantitativa, le caratteristiche spettroscopiche derivabili da analisi NMR al protone ed al carbonio, IR ed UV per una miscela equimolare di toluene ed acetofenone (fenil-metil-chetone).
   Dare una interpretazione della origine delle caratteristiche spettroscopiche.

Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Compito di Chimica Generale ed Inorganica
per l'ammissione al Corso di laurea specialistica in
Chimica, Chimica Industriale, Scienze Geologiche, Gestione e
Valorizzazione delle Risorse Naturali

Anno accademico 2004–2005

1. Quali di queste molecole hanno momento dipolare? Spiegare, tenendo conto della struttura tridimensionale. Ove possibile, considerate gli isomeri geometrici.

$$PtCl_2(NH_3)_2\,, \quad BeCl_{2\,(g)}\,, \quad MnCl_2(NH_3)_2\,.$$

2. Classe ed elementi di simmetria delle seguenti specie:

$$H_2O\,, \quad [PtCl_4]^{2-}\,, \quad [MnCl_4]^{2-}\,, \quad BH_3\,, \quad CH_3Cl\,.$$

3. Proponete uno schema di legame per le molecole biatomiche omonucleari del primo (H/He) e del secondo periodo.

4. Proponete una sintesi per ciascuna delle seguenti specie, specificandone metodo(i) di purificazione e proprietà:

$$AlBr_6\,, \quad [PtCl_3(C_2H_4)]^-\,, \quad Fe(C_5H_5)_2\,, \quad Ni(CO)_4\,.$$

5. Per le specie:

$$[Fe(CN)_6]^{4-}\,, \quad Cr(CO)_6\,, \quad [PtCl_4]^{2-}$$

proponete uno schema di legame chimico che ne giustifichi le proprietà.

Anno accademico 2005–2006

1. Classe ed elementi tipici di simmetria delle seguenti specie:

$$XeF_2\,,\quad XeF_4\,,\quad CO_2\,,\quad [PtCl_3Br]^{2-}\,,\quad BO_3^{3-}\,.$$

2. Sintesi (su scala industriale e/o di laboratorio), e proprietà di:

$$NO\,,\quad Al(C_5H_7O_2)_3\,,\quad SO_2\,.$$

3. Proprietà degli elementi carbonio e silicio e dei rispettivi composti.

Anno accademico 2006–2007

1. Sciogliendo 0.01 g di un sale in 1 L di acqua a 25 °C si ottiene una pressione osmotica di 0.00771 atm. Di quale sale si tratta?

2. Nel 1895 Lord Rayleigh determinò il peso molecolare dell'azoto. Rayleigh ricavò l'azoto dall'aria, sottraendo l'ossigeno tramite la reazione $2\,Cu + O_2 \longrightarrow CuO$, e la CO_2 per assorbimento con una soluzione basica. Rayleigh determinò anche il peso molecolare dell'azoto derivato dall'ammoniaca e lo trovò leggermente più piccolo di quello dell'aria. Perché? La differenza poteva ragionevolmente essere attribuita all'incompleta eliminazione di O_2?

3. Qual è il contenuto approssimativo di CO_2 (% in volume) nelle emissioni di un motore alimentato a metano?

4. Trovare il pH dell'acqua piovana non inquinata, in base ai seguenti dati: pressione totale = 1 atm, concentrazione di CO_2 nell'aria = 0.036%, costante di Henry per l'assorbimento di CO_2 in acqua $= K_H =$ 0.034 M/atm, costante di equilibrio per la prima idrolisi di $CO_2 = K_{idr} =$ $4.3 \cdot 10^{-7}$ M (a 25 °C).

5. Nei cristalli di NaCl entrambi gli ioni formano una struttura cubica a facce centrate. Se la densità è 2.17 g/cm^3, qual è la distanza tra due ioni adiacenti Na^+ e Cl^-?

6. Quali sono le configurazioni elettroniche dello stato fondamentale di $[Mn(CN)_6]^{3-}$ e di $[Mn(H_2O)_6]^{3+}$? Solo uno di questi complessi è colorato (cioè assorbe luce di lunghezza d'onda abbastanza lunga): quale?

Valori numerici di costanti fisiche e fattori di conversione.

- Costante dei gas: $R = 0.08206\,\mathrm{L\,atm/K} = 8.3145\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}} = 0.0019872\,\mathrm{kcal\,mol^{-1}\,K^{-1}}$.
- Costante di Planck: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$; $\hbar = h/2\pi = 1.0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$.
- Costante di Boltzmann: $K_B = 1.381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.

Anno accademico 2007–2008

1. Classe ed elementi di simmetria delle seguenti specie:

$$BCl_3\,,\qquad [PtBr_4]^{2-}\,,\qquad XeF_2\,,\qquad NO\,,\qquad CO_3^{2-}$$

2. Sintesi e proprietà dei seguenti composti:

$$Fe\,(C_5H_5)_2\,,\qquad Ni\,(CO)_4\,,\qquad HCl\,,\qquad H_2S$$

3. I composti di rame(**II**) sono generalmente colorati. Spiegare.

Anno accademico 2008–2009

1. Confrontare il biossido di carbonio con il biossido di silicio.
2. Valutare la solubilità in acqua del fosfato di calcio, $Ca_3(PO_4)_2$, sapendo che $K_{PS} = 2.07 \cdot 10^{-33}$.
3. Discutere la struttura del cloruro di sodio e proporre un metodo per ricavare l'energia reticolare, dopo averla definita.
4. Elencare alcuni metalli che si trovano in natura allo stato elementare e discutere le proprietà dell'elemento che rendono questo possibile.
5. Due composti A e B sono interconvertibili a temperatura ambiente. Una soluzione contiene l'80% di A a 20°C e il 72% a 80°C. Determinare il ΔG, il ΔH ed il ΔS per la conversione di A in B. Esplicitare le approssimazioni usate. Il valore della costante dei gas è $R = 8.3145$ J mol^{-1}.
6. Perché l'acqua di mare contiene, in media, 1700 volte più sodio e 30 volte più calcio di quella dei fiumi? Il tempo di residenza di Ca^{2+} nell'acqua di mare è dell'ordine di un anno. Valutare quello di Na^+.

Anno accademico 2009–2010

1. Descrivere ed interpretare i fenomeni che avvengono quando le sostanze sotto indicate vengono a contatto con acqua in eccesso a condizioni standard.

   $$MgCl_2\,, \quad NH_4Cl\,, \quad CH_3COONa\,, \quad AgBr$$

   Suggerire un metodo sperimentale per verificare ciascun comportamento.
2. L'idrogeno può essere ottenuto da carbone solido ed acqua a temperature decisamente maggiori di 100 ºC. La reazione è endotermica.
   Scrivere l'equazione di reazione ed indicare quale effetto sulla conversione di H_2O in H_2 hanno:
   (a) l'aumento di temperatura;
   (b) la diminuzione di pressione;
   (c) la variazione del rapporto molare dei reagenti;
   (d) l'aumento della superficie specifica del carbone solido.

   Proporre un metodo per l'ottenimento di H_2 puro dalla miscela di reazione impostando il bilancio di massa relativo.
3. Descrivere le strutture elettroniche e le relative geometrie molecolari dei seguenti composti, indicando anche quali di essi hanno un momento di dipolo permanente:

   $$CO_2\,, \quad SO_2\,, \quad O_3\,, \quad BF_3\,, \quad H_2O_2$$

4. Un generico acido triprotico H_3XO_4 ha costanti di equilibrio di dissociazione K_1, K_2, K_3. Descrivere una espressione che permetta di calcolare il pH e la concentrazione molare di tutte le specie presenti quando n moli di questo acido vengano disciolte in acqua per dare m litri di soluzione.

Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Compito di Chimica Organica
per l'ammissione al Corso di laurea specialistica in
Chimica, Chimica Industriale, Scienze Geologiche, Gestione e Valorizzazione delle Risorse Naturali

Anno accademico 2004–2005

1. Relazioni tra struttura e attività in molecole organiche.

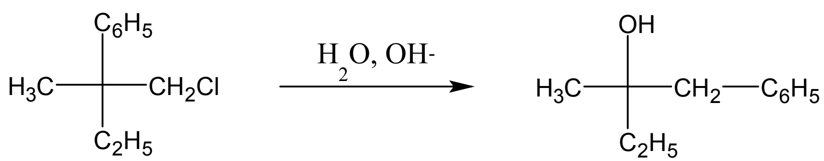
   Descrivere in maniera schematica gli aspetti fondamentali e riportare un caso esemplificativo.

2. La catalisi stereoselettiva in chimica organica.

   Descrivere in maniera schematica gli aspetti fondamentali e riportare un caso esemplificativo.

Anno accademico 2005–2006

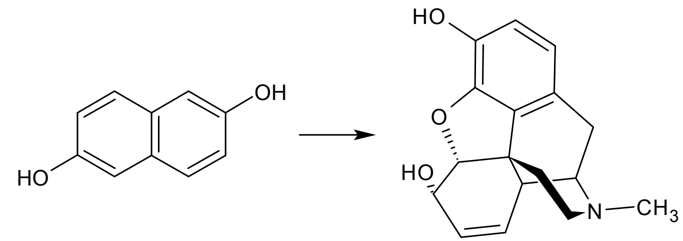
1. Quanti radicali *ter*-eptilici esistono?
2. Indicare gli stereoisomeri del 2,3-butandiolo.
3. Si osserva sperimentalmente la seguente reazione da giustificare



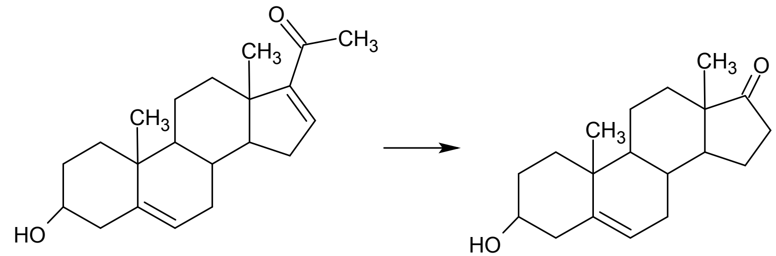
4. Indicare il prodotto ottenuto e il meccanismo dell'acilazione del toluene per mezzo del cloruro di benzoile.
5. Descrivere sinteticamente metodi generali per la preparazione di composti enantiomericamente arricchiti.
6. Proporre metodi chimici e spettroscopici per l'identificazione della struttura dei vari isomeri del difeniletilene.

Anno accademico 2006–2007

1. Il candidato descriva una possibile via di sintesi per la morfina a partire dal naftalene-2,6-diolo (eventualmente utilizzando una precedente analisi retrosintetica).



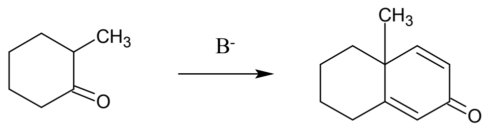
2. Il candidato descriva una possibile via di sintesi per la trasformazione del progesterone in deidroepiandrosterone.



Progesterone

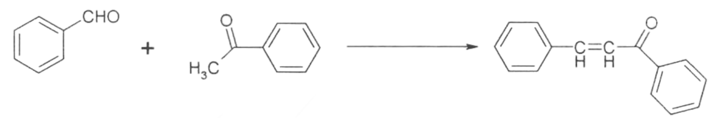
Deidroepiandrosterone

3. Il candidato descriva una possibile via di sintesi per la seguente trasformazione.

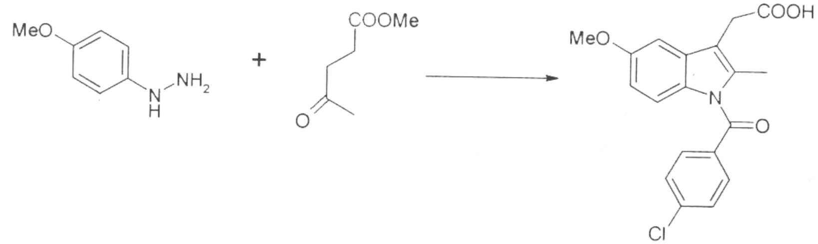


Anno accademico 2007–2008

1. Il candidato descriva un possibile meccanismo per la seguente reazione da bilanciare:



2. Il candidato descriva una possibile via di sintesi per il farmaco indometacina a partire dai seguenti composti e utilizzando reagenti commerciali.



3. Il candidato ordini le frequenze di assorbimento IR (in cm^{-1}) del gruppo C=O per le seguenti classi di composti fornendo una spiegazione per le differenze riscontrate:

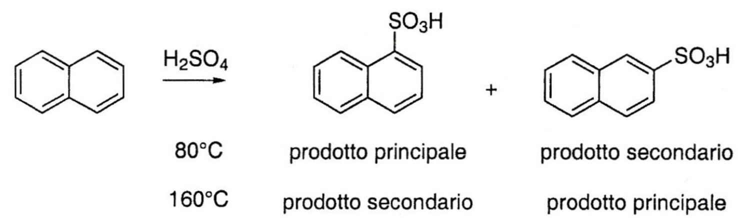
   $$\mathrm{RCO\text{-}R'};\ \mathrm{HCO\text{-}R};\ \mathrm{RCOOH};\ \mathrm{RCOOR'};\ \mathrm{RCONHR'};\ \mathrm{RCO\text{-}O\text{-}OCR'}$$

   dove R e R′ sono gruppi alifatici.

Anno accademico 2008–2009

1. Il 2−metilpentano ha un’entalpia di formazione minore di 0.66 kcal/mol (2.76 kJ/mol) rispetto al suo isomero 3−metilpentano. Si giustifichi tale differenza attraverso un’analisi stereo chimica di questi composti.

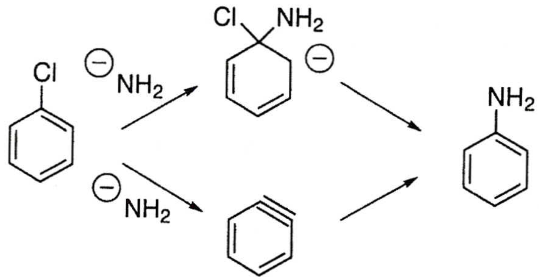
2. Si considerino i seguenti dati



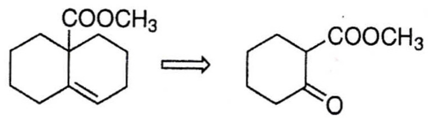
   Si disegnino i diagrammi di coordinata di reazione su un solo grafico, che mostri le energie relative degli intermedi organici e dei prodotti, collocando il reagente al centro e i due prodotti a destra e a sinistra.

   Si spieghi perché il rapporto tra i due prodotti è diverso al variare della temperatura, perché uno stato di transizione è più stabile dell’altro e perché uno dei due prodotti è più stabile dell’altro.

3. Per trattamento del clorobenzene con potassioammide in ammoniaca liquida si ottiene anilina. Si proponga un esperimento per distinguere tra i due meccanismi di reazione sotto indicati.



4. Attraverso un approccio retrosintetico, si proponga una sintesi del composto riportato sotto a sinistra a partire dal substrato a destra.



Anno accademico 2009–2010

1. La sintesi di eteri dell'acido carbonico può essere realizzata per reazione di $COCl_2$ con composti ossidrilati (METODO 1) oppure, per evitare l'uso di un composto tossico, da CO, ossigeno ed alcoli con Cu_2Cl_2 come catalizzatore (METODO 2).
   Scrivere le equazioni bilanciate della sintesi di dimetilcarbonato secondo i due METODI, indicando metodi opportuni per l'analisi della miscela di reazione e la separazione del prodotto desiderato.

2. Descrivere un possibile metodo per la sintesi del p-ammino-acetofenone a partire da benzene, indicando le condizioni di reazione e metodi di purificazione di intermedi e prodotti.

3. Scrivere le formule di struttura di tutti i possibili prodotti ottenibili per addizione completa di una mole di bromo ad una mole di isoprene (2-metil-1,3-butadiene).
   Indicare in quali casi si ottengono diastereoisomeri e quali sono le loro strutture.
   Indicare inoltre un metodo per ottenere uno dei possibili enantiomeri allo stato di elevata purezza ottica (enantiomerica).

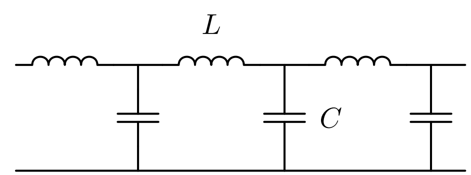
4. Descrivere e spiegare un metodo per ottenere radicali liberi organici al carbonio ed all'ossigeno senza impiego di radiazioni. Indicare inoltre un esempio di reazione chimica che impieghi i radicali liberi di cui sopra come reattivi e la struttura di reagenti e prodotti.

Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Prova di Fisica per l'ammissione alla Laurea Specialistica in Fisica
Corsi di laurea magistrale in Scienze Fisiche e Fisica Applicata

Anno accademico 2003–2004

1. Due pendoli matematici identici di massa m e lunghezza l sono appesi agli estremi di un segmento orizzontale pure di lunghezza l. Calcolare le frequenze ed i modi propri delle piccole oscillazioni del sistema, includendo l'attrazione gravitazionale fra le due masse.

2. Si consideri la linea di trasmissione in figura, composta da una successione di condensatori ed induttori ideali, ciascuno rispettivamente di capacità C ed induttanza L. Si dimostri che, per un opportuno intervallo di frequenze, campi elettromagnetici possono essere trasmessi lungo la linea e se ne determini la dispersione $w(k)$, illustrandola con un grafico. Si indichi con l la periodicità spaziale della linea.



3. Un cilindro metallico è percorso da una densità di corrente costante ed uniforme $\vec{J}_0$; il metallo di cui è composto ha conducibilità σ_0. Sia poi introdotta al suo interno un'inclusione sferica di raggio molto piccolo rispetto alle dimensioni del cilindro e conducibilità $\sigma_1 \neq \sigma_0$. Si calcoli la densità di corrente all'interno dell 'inclusione.

4. (a) Sia data una distribuzione termica di fotoni, isotropa in un sistema di riferimento S, con densità di energia u_γ. Si prenda l'energia di

ciascun fotone $h\nu \ll m_e c^2$, ove m_e è la massa dell'elettrone. Si prenda anche un elettrone che si muove con velocità $\vec{v}$ rispetto al sistema di riferimento S. Si dimostri che, al primo ordine in v/c, l'elettrone subisce una forza di attrito

$$\vec{F} \approx -\frac{\vec{v}}{c}\sigma_T u_\gamma \tag{1}$$

ove σ_T è la sezioned'urto Thomson.

(b) Ora si consideri un gas totalmente ionizzato, e composto di soli protoni ed elettroni per semplicità, in orbita circolare (ove la forza gravitazionale bilancia quella centrifuga) in un disco infinitamente sottile intorno ad una stella di massa M. Ammettiamo inoltre che il disco più l'oggetto compatto generino una densità di energia $u_\gamma(r)$ in fotoni che, per semplicità, consideriamo isotropa e termica.

Qui r è la distanza dalla stella. In queste condizioni, esiste una corrente nel disco. Calcolate il campo magnetico che ne deriva, assumendoche la forza di attrito sia molto minore di quella gravitazionale. Si indichi con $n_e(r)$ la densità superficiale locale di elettroni e si assuma che il disco si estende da $R_{min} = 0$ a $R_{max} = +\infty$.

Anno accademico 2004–2005

1. Si consideri un gas ionizzato classico composto da elettroni (di carica $-e$ e concentrazione n_o) e da ioni (di carica Z_e e concentrazione $P_o = n_o/Z$) ad una temperatura T sufficientemente alta perchè l'energia di interazione elettrostatica possa essere considerata una piccola perturbazione rispetto all'energia termica. Assumendo che in un punto all'interno del gas ionizzato sia fissata una carica esterna Q, si determini il potenziale elettrostatico in funzione della distanza da essa.

2. In un dielettrico uniassiale, la relazione tra i campi macroscopici $\vec{E}$ e $\vec{D}$ è data da

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \;; \quad \text{con} \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j \,.$$

   Si determini il potenziale elettrostatico $V(\vec{r})$ dovuto ad una carica puntiforme q posta all'interno di un dielettrico uniassiale.

3. Due pendoli matematici identici di massa m e lunghezza l, sospesi su una retta orizzontale a distanza a e vincolati su un piano verticale, sono perturbati dalla sola mutua interazione gravitazionale.

   Determinare i modi propri di oscillazione del sistema e le relative frequenze al primo ordine nella costante di Newton.

Anno accademico 2005–2006

1. Una superficie sferica di raggio R è ricoperta da una densità di carica elettrica uniforme, σ. Se ora questo guscio viene tagliato esattamente in due, si calcoli la forza repulsiva fra i due emisferi.

2. Si consideri un lungo bicchiere cilindrico verticale che contiene una sostanza alla temperatura T. Al di sotto di una quota $h(T)$ la sostanza è in fase solida, mentre al di sopra è in fase liquida. Sono noti il calore latente di fusione per unità di massa q e la densità della fase liquida ρ_l. Dalla misura della derivata $\frac{dh}{dT}$ si risalga alla densità della fase solida ρ_s.

3. Si prenda un cristallo monoatomico costituito da $N = 10^{23}$ atomi, situati in posizioni normali O o in posizioni interstiziali X. Per prima cosa, si calcoli l'entropia per gli stati in cui n atomi con $N \gg n \gg 1$ inizialmente in posizioni normali O siano saltati in posizioni X (ognuno degli n in una delle 8 posizioni vicine). Poi si calcoli la frazione di stati interstiziali occupati a bassa temperatura $k_B T \ll \varepsilon$ ove ε è la differenza di energia $E_X - E_O$ fra l'energia dello stato interstiziale e l'energia dello stato normale. Si trascurino le interazioni fra atomi di siti diversi.

4. Un sistema binario è costituito da due oscillatori armonici unidimensionali di uguale massa e frequenze proprie ω_1 e ω_2 accoppiati. L'energia potenziale del sistema accoppiato è

$$V = \frac{\omega_1^2 m x_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 m x_2^2}{2} + \frac{\omega_a^2 m (x_1 - x_2)^2}{2}$$

dove x_1 e x_2 sono gli spostamenti dalle posizioni di equilibrio dei due oscillatori. Si ricavino le frequenze dei due modi normali ω_+ e ω_-. Inoltre, nel caso semplice in cui $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_a^2 = k/m$ si trovino i modi normali relativi alle due frequenze.

Anno accademico 2006–2007

1. Una cometa si muove su una traiettoria parabolica intorno al sole nello stesso piano dell'orbita terrestre, assunta circolare.

   Trovare il tempo T che la cometa spende all'interno dell'orbita terrestre in funzione del perielio p della sua traiettoria e calcolarne il valore massimo possibile.

2. Un pendolo triplo è costituito da tre masse αm, m, m attaccate mediante un unico filo di massa trascurabile a distanze rispettivamente a, $2a$, $3a$ dal punto di sospensione.

   Trovare il valore di α affinché il sistema abbia un modo di piccole oscillazioni di pulsazione $\omega = \sqrt{2g/a}$ e descriverne le coordinate.

3. Una sfera conduttrice di raggio a si muove con velocità costante $\mathbf{v}$ attraverso un campo magnetico $\mathbf{B}$ pure costante e ortogonale a $\mathbf{v}$.

   Calcolare al primo ordine in v/c la densità di carica superficiale indotta sulla sfera.

4. Si calcoli il tempo che impiega l'elettrone di un atomo di idrogeno classico di raggio iniziale $a_0 = 10^{10} m$ a collassare sul protone, assumendo piccola l'energia persa in una rivoluzione rispetto all'energia totale.

   Costanti numeriche
   Carica dell'elettrone $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$.
   Massa dell'elettrone $m = 9.1 \cdot 10^{-31} Kg$.
   Velocità della luce $c = 3 \cdot 10^8 m/s$.
   $1/4\pi\varepsilon_0 \ = \ 9 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}$.

5. In un fascio ideale di ioni di raggio R e lunghezza molto maggiore di R, con densità di carica e di corrente a simmetria cilindrica, calcolare la forza totale che si esercita su un singolo ione alla periferia del fascio, note la corrente del fascio I, la carica q e la velocità dei singoli ioni.

6. Si consideri il modello di Debye per un cristallo bidimensionale. Si calcoli (a meno di un integrale adimensionale che si può lasciare indicato) la capacità termica del cristallo in funzione del numero totale di atomi N e della frequenza massima di vibrazione ω_D.

Anno accademico 2007–2008

1. Un meteorite di massa m che fa parte della scia di una cometa coplanare all'orbita terrestre collide con la terra e vi si conficca.

   Assumendo per semplicità 1'orbita terrestre circolare e l'orbita della cometa parabolica, si calcoli la modifica dell'orbita prodotta dalla collisione in funzione dei parametri dell'orbita della cometa. Si calcoli la quantità di calore liberata nella collisione.

2. Un disco cilindrico di rame di raggio R e spessore a al tempo $t = 0$ ruota intorno al suo asse con velocità angolare $\vec{\omega}$ in un campo magnetico costante $\vec{H}$ parallelo all'asse. La periferia del disco è collegata al suo centro da un contatto strisciante che non ruota di resistenza trascurabile e a simmetria cilindrica.

   Si calcoli la densità di corrente e la potenza sviluppata in calore nel disco. Si calcoli il momento frenante prodotto dal campo magnetico. Se il disco non è soggetto ad altre forze si calcoli la sua velocità angolare per $t > 0$.

   Si calcoli la densità superficiale di carica se il circuito non è chiuso.

3. Si calcoli la figura di diffrazione prodotta da un fascio luminoso che incide normalmente su una apertura circolare di raggio a. (Diffrazione di Fraunhofer). Si faccia uso dell'approssimazione nota come principio di Huygens.

4. Si scriva la funzione di partizione Z per un gas di Boltzmann perfetto monoatomico.

   Si mostri che essa è invariante per trasformazioni canoniche delle coordinate e dei momenti coniugati degli atomi.

   Si calcoli l'energia interna in termini di Z.

   Si calcoli 1'energia libera.

   Si calcoli la pressione (Si scriva l'equazione di stato).

   Si calcoli l'entropia e si mostri che essa è definita a meno di una costante additiva.

Anno accademico 2008–2009

1. Sia data una quantità di materia M di densità ρ fissata, ma deformabile a piacere, a volume costante. Quale forma, posizione e orientamento daranno il massimo campo gravitazionale in un punto P dato?

2. Trovate la forza (direzione e modulo) agente su una spira di raggio a che porta corrente I, ed è posta ad una distanza b dalla superficie (piana ed infinita) di un superconduttore. Assumete che l'asse della spira sia parallelo alla normale della superficie del superconduttore. Ricordate che un superconduttore può essere visualizzato come un oggetto all'interno del quale si annullano *sia* i campi elettrici *che* quelli magnetici, ma che può avere correnti e/o cariche superficiali. Considerate pure il solo caso $a \ll b$.

3. Si consideri un sistema di N dipoli magnetici ciascuno dei quali può avere proiezione del dipolo magnetico lungo la direzione di un campo magnetico esterno H pari a $\pm\mu$. Trascurando le mutue interazioni tra i dipoli magnetici, si determini in funzione di H e della temperatura T l'entropia del sistema. Si discuta come varia l'entropia col campo magnetico a temperatura fissata e come varia la temperatura in un processo di demagnetizzazione adiabiatica in cui si diminuisce H ad entropia costante.

4. Nei campi di forza centrali con legge $\vec{F} = -k\hat{r}/r^2$, non si conservano solamente l'energia E e il momento angolare $\vec{l}$, ma anche una quantità chiamata *vettore di Runge-Lenz* $\vec{A}$, data da

$$\vec{A} \equiv \vec{l} \wedge \vec{p} + km\hat{r} \ ,$$

ove $\vec{p}$ e m sono l'impulso e la massa di una particella nel campo di forza centrale in questione. Sapete derivare dalla conservazione di $\vec{A}$ l'equazione delle orbite, **senza** risolvere alcuna equazione differenziale?

5. Un gas ionizzato è composto da ioni positivi di carica Ze e densità numerica p_0 e da elettroni di carica $-e$ e densità numerica $n_0 = Zp_0$. Si suppone che il gas, mantenuto alla temperatura T, sia descrivibile tramite la distribuzione di Boltzmann e che l'energia termica k_BT sia molto maggiore dell' energia di interazione elettrostatica. Assumendo di avere una carica esterna $Q = +Ze$ fissa nell'origine, si determini il potenziale elettrostatico risultante nel gas all'equilibrio.

Anno accademico 2009–2010

1. Un blocco di massa M scivola senza attrito su un piano, urtando un blocco di massa m. Il blocco m così sospinto urta contro un muro, e rimbalza di nuovo verso il blocco M, e questo ciclo si ripete finché il blocco M si arresta. Sapete calcolare quanti urti sono necessari perché il blocco M inverta il suo moto? Assumete gli urti elastici, il problema privo di attriti, ma lasciate il rapporto m/M arbitrario.

2. Un dipolo elettrico di intensità p è posto all'interno di una sfera cava di raggio R, in posizione eccentrica a una distanza $a < R$ dal centro della sfera; la sfera, assunta come perfettamente conduttrice, è posta a potenziale nulla, cioè a terra. Il dipolo punta in direzione radiale, e può essere idealizzato come ideale, cioè puntiforme ma con intensità p non nulla. Quanto vale il potenziale all'interno della sfera?

3. Nel modello di Ising unidimensionale per il ferromagnetismo, N particelle di spin $1/2$ sono disposte lungo una linea retta, e ciascuna particella interagisce solo con i vicini prossimi. Sapendo che J è l'energia di interazione quando gli spin di una coppia di atomi sono paralleli, e $-J$ è l'energia di interazione quando gli spin sono antiparalleli, calcolate la funzione di partizione Z per lo stato a temperatura T arbitraria.

4. Siamo in autostrada in un giorno di nebbia. La visibilità è di 50 metri e la radio ci informa che la nebbia scomparirà entro un'ora. Qual è la densità volumetrica delle gocce d'acqua? Ottenere una espressione analitica per n e provare a darne una stima numerica usando valori ragionevoli per le quantità coinvolte.

Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Compito di fisiologia generale e neurofisiologia
per l'ammissione al Corso di laurea specialistica in
Scienze e tecnologie biomolecolari

Anno accademico 2004–2005

Svolgere i seguenti quesiti:

1. La trasmissione sinaptica eccitatoria: meccanismi di base e plasticità.

2. Comparare i meccanismi di trasduzione nei neuroni recettoriali delle varie modalità sensoriali.

Anno accademico 2005–2006

1. Proporre degli approcci sperimentali che permettano di studiare le basi neurobiologiche della memoria nei vertebrati discutendo i vantaggi e gli svantaggi di ciascun approccio.

2. L'attivazione di ciascuno di due ingressi sinaptici eccitatori causa nel neurone postsinaptico una depolarizzazione di 2 mV. La loro stimolazione contemporanea determina una depolarizzazione di 5 mV e non di 4 mV come atteso dalla semplice sommazione delle risposte. Discutere le possibili cause del fenomeno, in questo caso o nel caso in cui la depolarizzazione provocata dalla stimolazione contemporanea delle sinapsi sia di solo 3 mV.

Anno accademico 2006–2007

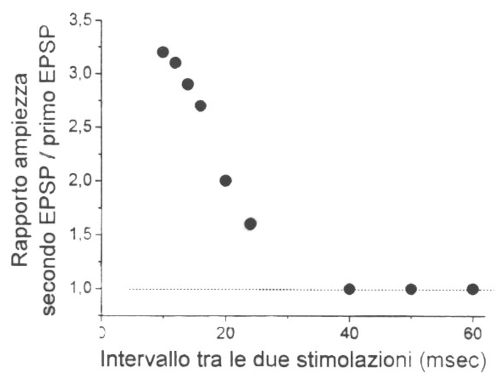
1. I fattori neurotrofici, come Nerve Growth Factor (NGF) e Brain-Derived Neurotrophic Factor (BDNF) sono una famiglia di proteine secrete che promuovono la sopravvivenza neuronale legandosi ad appositi recettori sulle cellule bersaglio. In un esperimento, i ricercatori trovano che neuroni del sistema nervoso centrale sopravvivono in coltura se esposti a sufficienti concentrazioni di BDNF. Tuttavia, dopo alcuni giorni gli stessi neuroni cominciano a morire nonostante si continui ad aggiungere la stessa quantità di BDNF al mezzo di coltura. Il candidato fornisca possibili spiegazioni di tale fenomeno.

2. Il neurone è una cellula altamente polarizzata, con il corpo cellulare e la terminazione sinaptica che possono essere distanti anche parecchi mm. Il candidato tratti dei possibili meccanismi di comunicazione bidirezionale tra la sinapsi e il soma neuronale.

3. In un esperimento di elettrofisiologia, un ricercatore intende bloccare l'attività elettrica della corteccia cerebrale e si serve di due approcci sperimentali: a) iniezione di tetrodotossina, bloccante dei canali sodio voltaggio-dipendenti coinvolti nella genesi del potenziale d'azione; b) iniezione di antagonisti dei recettori post-sinaptici per il glutammato. Discutere le differenze tra le due strategie sperimentali.

Anno accademico 2007–2008

1. Consideriamo un neurone *A* che proietta ad un secondo neurone *B*. Un ricercatore sta registrando i potenziali post-sinaptici eccitatori (EPSP) nel neurone *B* dopo stimolazione elettrica del neurone *A*. In particolare, il ricercatore somministra due stimolazioni elettriche al neurone *A* e misura le ampiezze dei due EPSP evocati nel neurone *B*. Riporta poi in un grafico il rapporto tra le ampiezze dei due EPSP in funzione dell'intervallo tra le due stimolazioni. Ottiene i dati riportati nel seguente grafico:

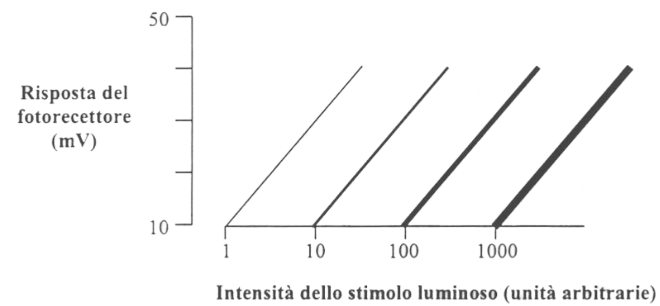


Come possono essere spiegate queste osservazioni? Che cosa si puo concludere sul comportamento della sinapsi tra il neurone *A* e il neurone *B*?

2. Meccanismi di regolazione dell'esocitosi nei neuroni.

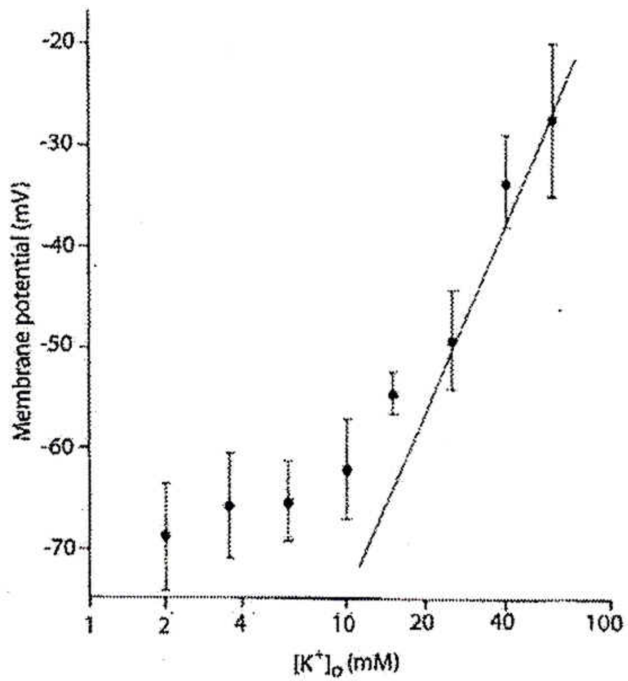
3. I due emisferi cerebrali mostrano spiccate differenze anatomiche e funzionali. Illustrare con esempi e discutere le implicazioni della lateralizzazione delle funzioni cerebrali.

4. Nel grafico qui sotto sono riportate quattro curve che rappresentano la risposta (variazione del potenziale di membrana) di un fotorecettore retinico ad uno stimolo visivo costituito da un breve lampo di luce di durata fissa. L'intensita del lampo di luce è riportata in ascissa in condizioni di luminosità di fondo diverse: la curva con la linea più sottile (quella più a sinistra) rappresenta la condizione di luminosità di fondo zero e le tre curve con tratto progressivamente piu spesso rappresentano tre condizioni di luminosità di fondo progressivamente crescenti. Quali conclusioni si possono trarre da questo esperimento? Con quale caratteristica della visione è correlata questa proprieta dei fotorecettori?



Anno accademico 2008–2009

1. Un ricercatore misura il potenziale di membrana di neuroni dissociati in funzione della concentrazione di potassio extracellulare. Ottiene i dati (media $\pm$ deviazione standard, a temperatura costante) riportati nel seguente grafico:



La linea retta rappresenta il potenziale predetto dall'equazione di Nerst per il potassio

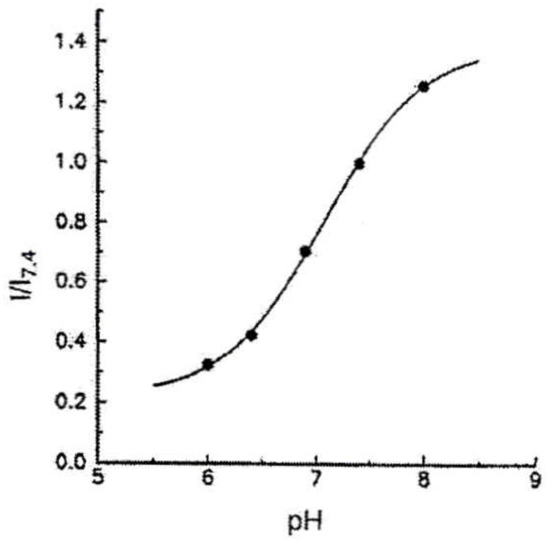
$$E_K = \frac{RT}{F} \ln \frac{[K^+]_e}{[K^+]_i}$$

dove $[K^+]_e$ e $[K^+]_i$ rappresentano rispettivamente la concentrazione extracellulare e intracellulare di potassio, T è la temperatura, e R e F sono costanti.

Come si spiegano questi risultati sperimentali? Perché si ha una forte deviazione rispetto all'equazione di Nernst per le basse concentrazioni di potassio extracellulare?

2. Nella corteccia cerebrale dei primati sono stati individuati dei neuroni, detti *neuroni specchio*, che si attivano sia quando viene compiuta una data azione, che quando il soggetto vede la stessa azione compiuta da altri. Quali sono le possibili implicazioni di questa scoperta per la comprensione dei meccanismi neurali del comportamento?

3. In un esperimento di patch-clamp vengono misurate le correnti calcio voltaggio-dipendenti dei neuroni variando sistematicamente il pH della soluzione extracellulare. Nel seguente grafico sono riportati i valori di corrente massima ottenuti (normalizzati alla corrente massima registrata a pH = 7.4):



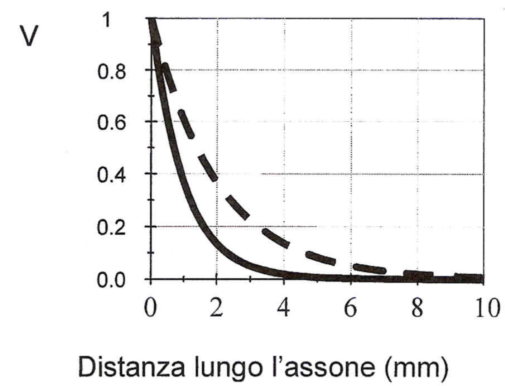
Commentate i risultati sperimentali. Come vi aspettate che cambi l'attività in un circuito neuronale quando il pH viene innalzato/abbassato?

4. Come varia la produzione di insulina durante la giornata? Illustrare con un grafico. Tramite quali meccanismi viene mantenuta entro i limiti fisiologici la concentrazione di glucosio nel sangue?

5. In due assoni diversi si registra l'ampiezza di un segnale elettrotonico, provocato dall'iniezione di corrente, al punto di insorgenza del segnale, $x = 0$ (punto in cui viene iniettata la corrente), ed a distanze crescenti da tale punto. Le due curve in figura mostrano l'ampiezza V del segnale in funzione della distanza lungo l'assone per i due assoni. In entrambi i casi, l'ampiezza $V(x)$ è normalizzata all'ampiezza $V(0)$ registrata nel punto $x = 0$.

   (a) quale dei due assoni ha il diametro maggiore? Giustificare la risposta.

   (b) quale è il rapporto fra i due diametri? Giustificare la risposta.



Anno accademico 2009–2010

1. Cosa si intende per plasticità sinaptica? Fornire un esempio, discutendone i meccanismi alla base.

2. Discutere

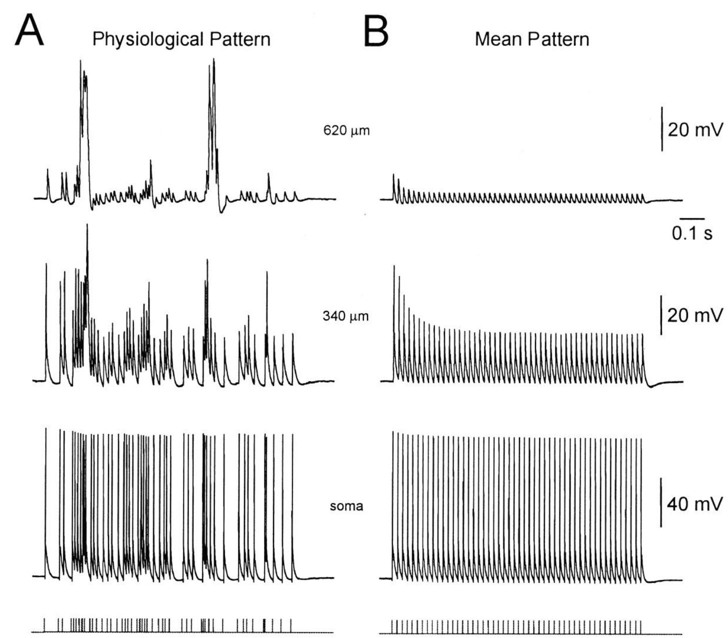
   i) come l'attività sinaptica modifica l'espressione genica di un neurone e

   ii) come la espressione genica neuronale può essere controllata localmente, in funzione della attività di specifiche sinapsi di un neurone.

3. È stato recentemente dimostrato che l'esperienza è in grado di modificare la trascrivibilità genica attraverso meccanismi epigenetici. Quali sono le possibili implicazioni di questa scoperta per il dibattito *nature versus nurture* nello sviluppo del comportamento? E per la comprensione dei meccanismi neurali dell'apprendimento?

4. Alla giunzione neuromuscolare si osserva che la somministrazione della sostanza A impedisce che al rilascio di Acetilcolina da parte del motoneurone faccia seguito un potenziale postsinaptico eccitatorio (EPSP) e un potenziale d'azione (PdA) muscolare mentre la somministrazione della sostanza B non impedisce che al rilascio di Acetilcolina da parte del motoneurone faccia seguito un EPSP ma impedisce che a questo faccia seguito un PdA muscolare. Quale delle due sostanze potrebbe essere curaro e quale Tetrodotossina, e perché?

5. Nel grafico sottostante viene riportata la registrazione del potenziale di membrana effettuata al soma e a due posizioni lungo il dendrite apicale di una cellula piramidale corticale in vivo, a 340 micron ed a 620 micron di distanza dal soma durante l'applicazione di uno stimolo elettrico al soma. Lo stimolo è costituito da un treno di impulsi elettrici.



In A la sequenza riproduce una tipica distribuzione temporale presente in un segnale fisiologico, con variazioni della distanza temporale fra un potenziale d'azione somatico ed il successivo; in B invece la distribuzione degli impulsi è periodica e riproduce la frequenza media di occorrenza dei potenziali d'azione in A. Commentare il grafico in termini dei possibili ruoli della retropropagazione lungo l'albero dendritico delle cellule piramidali dei potenziali d'azione insorti al monticolo assonico.

6. Descrivere i metodi sperimentali oggi disponibili per interferire in modo mirato con specifiche funzioni in cellule nervose, discutendone in modo critico vantaggi, svantaggi e limitazioni.

Scuola Normale Superiore
Ammissione al 4° anno della Classe di Scienze
Compito di biologia e genetica molecolare
per l'ammissione al Corso di laurea specialistica in
Scienze e tecnologie biomolecolari

Anno accademico 2004–2005

Svolgere i seguenti quesiti:

1. Descrivere le basi molecolari del controllo tessuto-specifico dell'espressione genica.

2. Descrivete gli elementi essenziali del processo di replicazione semiconservativa del genoma dei procarioti e degli eucarioti.

Anno accademico 2005–2006

1. Quali proprietà distinguono significativamente il DNA dall'RNA? Potete descrivere quante specie di RNA sono presenti negli organismi viventi e con quali funzioni?
2. Descrivete i meccanismi fondamentali che regolano la replicazione del DNA nei procarioti e negli eucarioti.
3. Importanza delle interazioni tra proteine e DNA e metodi per il loro studio.

Anno accademico 2006–2007

1. Descrivete i diversi tipi di RNA presenti negli organismi viventi, le loro strutture ed i loro ruoli funzionali.
2. Aspetti strutturali e funzionali delle modifiche post-traduzionali delle proteine.
3. Principali fattori che modificano la struttura della cromatina e loro possibile significato funzionale.
4. Descrivete i principali farmaci antivirali attualmente in uso nonché le strategie e le difficoltà da superare per ottenerne di nuovi.

Anno accademico 2007–2008

1. I dati sulle sequenze del genomi di diversi organismi si stanno accumulando a tasso crescente; che conseguenze si possono prevedere per lo studio della biologia umana e per lo studio dei processi di evoluzione biologica?

2. Metodologie avanzate per lo studio delle proprietà delle macromolecole biologiche.

3. Meccanismi di produzione dei piccoli RNA negli organismi eucariotici e loro funzione.

4. La regolazione della replicazione del DNA negli organismi eucariotici e sua integrazione nel ciclo cellulare.

Anno accademico 2008–2009

1. Il genoma umano contiene circa 22.500 geni. Possiamo stimare quante proteine sono presenti nell'organismo umano? Indicare esempi esplicativi.

2. L'epigenetica: cos'è, come si esplica, che importanza ha per la biologia e per la salute umana.

3. La ricombinazione genetica: discutere il suo possibile ruolo evolutivo e descriverne i meccanismi molecolari nei procarioti e negli eucarioti.

4. Metodologie per lo studio ad alta processività dei livelli di espressione genica; discutere la loro utilità scientifica ed applicativa ed i loro limiti.

Anno accademico 2009–2010

1. Metodologie per lo studio delle macromolecole biologiche.
2. Processi che assicurano la stabilità del genoma.
3. Come i virus sfruttano le strutture degli organismi che infettano.
4. La terapia genica: possibili applicazioni, successi e difficoltà.

Scuola Normale Superiore
Prova scritta di geologia
per l'ammissione al 4° anno della Classe di Scienze

Anno accademico 2007–2008

Il candidato illustri i principali processi geodinamici che caratterizzano i margini di placca convergenti, anche facendo riferimento ad esempi attuali.

Anno accademico 2008–2009

Il candidato illustri le caratteristiche delle strutture litosferiche presenti in una zona di convergenza e discuta, anche mediante formule matematiche, le possibili modifiche alla loro configurazione al variare dell'inclinazione del piano di subduzione.

Anno accademico 2009–2010

Il candidato illustri, a partire dal tempo t_0 (corrispondente all'inizio della subduzione), l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle strutture litosferiche presenti nella placca superiore di una zona di convergenza caratterizzata dai seguenti parametri:

placca superiore costituita da litosfera oceanica;

placca superiore costituita da litosfera continentale;

angolo di subduzione α: 45°;

velocità di subduzione : 9 cm/anno;

angolo tra il vettore spostamento della placca inferiore e la direzione della zona di subduzione β: 90°.