Scuola Normale Superiore
Ammissione al I anno del corso ordinario

Prova di Matematica
per studenti di Matematica, Fisica e Informatica

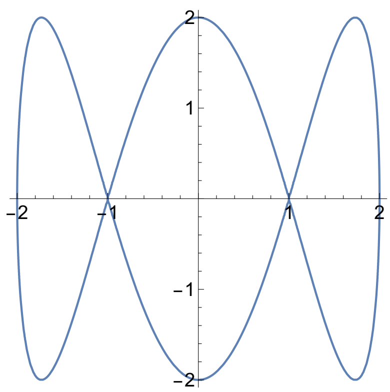
24 agosto 2023

Esercizio 1. Trovate tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali con la proprietà che
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$
per tutti gli x e y reali.

Esercizio 2. Se a è un parametro reale positivo, calcolate il numero $N(a)$ di soluzioni in x dell'equazione
$$\sin\bigl(a(\sin x + \cos^2 x)\bigr) = 0$$
con $0 \leq x \leq \pi/2$.

Esercizio 3. Siano R un numero reale positivo e k un intero positivo; sia inoltre X un insieme finito con n elementi contenuto nel disco
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$$
di centro l'origine e raggio R del piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che, per ogni punto (x_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$, il disco $\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < 1\}$ di raggio 1 centrato in (x_0, y_0) contenga al più k punti di X (in altre parole: ogni punto del piano $\mathbb{R}^2$ ha distanza strettamente minore di 1 da al più k punti di X). Dimostrate che vale la disuguaglianza $n \leq k(R+1)^2$.

Esercizio 4. Scrivete un polinomio a coefficienti reali in due variabili $p(x,y)$ tale che il suo luogo di zeri
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = 0\}$$
abbia questo aspetto



Giustificate la vostra soluzione.

Continua sulla pagina successiva

Esercizio 5. Sia $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi (anche negativi). Per *progressione aritmetica* intendiamo un insieme di numeri interi della forma $\{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$, dove a e b sono numeri interi e $b > 0$. L'intero positivo b si denomina modulo (o ragione) della progressione.

Dimostrate che $\mathbb{Z}$ non può essere unione di quattro o meno progressioni aritmetiche i cui moduli siano tutti distinti e tutti maggiori di 1.

Esercizio 6. Ricordiamo che lo spazio $\mathbb{R}^4$ è lo spazio delle quadruple di numeri reali (x_1, x_2, x_3, x_4). Se $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ sono punti di $\mathbb{R}^4$, il *punto medio* M *del segmento* AB è dato dalla formula

$$M = \Big(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}, \frac{a_4 + b_4}{2}\Big) \in \mathbb{R}^4 .$$

Sia $R = R_1 \cap R_2$ l'intersezione delle due regioni

$$R_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| \leq 2\} \quad \text{e}$$

$$R_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1, |x_4| \leq 1\} .$$

Un punto $P \in R$ è un *vertice* se e solo se non esistono due punti A e B di R con $A \neq B$ tali che P sia il punto medio del segmento AB.

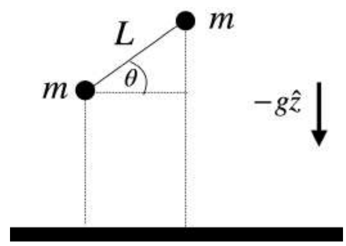
Determinate tutti i vertici di R. Quanti sono?

Scuola Normale Superiore, ammissione al I anno del corso ordinario

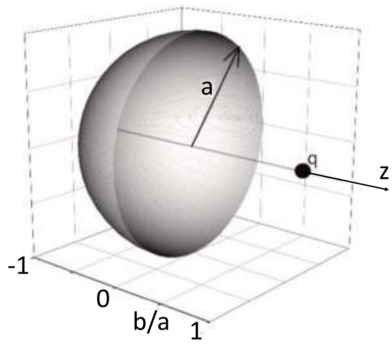
Prova di Fisica per matematici, fisici, informatici – 25 agosto 2023

Problema 1. Due punti materiali di massa identica sono in caduta libera, collegati da una asta rigida di massa trascurabile e lunghezza L.

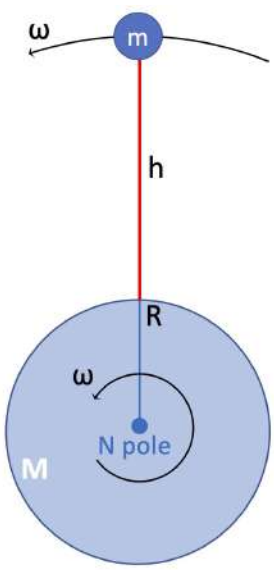
Al tempo $t = 0$, entrambe le masse hanno velocità iniziale zero e sono posizionate a diverse altezze dal suolo, come mostrato nell'immagine allegata. Si determini come si muove il sistema immediatamente dopo il primo contatto con il suolo, immaginando che quest'ultimo sia perfettamente liscio ed assumendo un modello di collisione completamente elastica per l'impatto.



Problema 2. Si consideri una carica puntiforme q posta in un punto $(0,\, 0,\, b \geq 0\,)$ sul semiasse positivo delle z in presenza di un sottilissimo foglio metallico isolato e complessivamente neutro disposto lungo la metà della superficie sferica di raggio a centrata nell'origine e posta nel semispazio negativo delle z, come schematizzato in figura. Si discuta qualitativamente la forza a cui è soggetta la carica q e si determini se per qualche valore positivo di b essa possa o meno essere repulsiva, ovvero diretta come $+\hat{z}$ (si considerino, in particolare, il caso con $b \gg a$ e quello con $0 \leq b \leq a$) .



Problema 3. L'idea dell'ascensore spaziale risale al XIX secolo, ed è stata sfruttata da numerosi autori di fantascienza. A partire dagli anni 60 del XX secolo, è stata anche presa in considerazione scientificamente. Si tratterebbe di un cavo di lunghezza h e sezione σ ancorato alla superficie terrestre mantenuto teso da un contrappeso di massa m all'altro estremo, in rotazione geosincrona equatoriale (Figura sotto), su cui far salire navette per facilitare la parte iniziale più costosa dei viaggi spaziali.



(a) Assumendo la massa del cavo trascurabile, calcolare la lunghezza $h = L$ per cui la tensione è minima.

(b) Assumendo ora che la lunghezza del cavo ecceda di poco L, $h = L + l$ con $l << L$, si calcoli la tensione del cavo $T(l)$.

(c) Di recente è stata avanzata l'ipotesi di realizzare il cavo con nanotubi di carbonio. Si stima che un singolo nanotubo perfetto del diametro di circa 1 nm possa sopportare una trazione (forza di tensione per unità di sezione) fino a $\tau_{max} \sim 100$ GPa prima di rompersi (1 Pa= 1 Newton/m^2). Ponendo $l = 100$ km e sempre in approssimazione di massa del cavo trascurabile, si stimi il valore massimo utilizzabile per la massa m, per un cavo di diametro $d = 10$ cm, assumendo che il cavo abbia la stessa trazione di rottura del singolo nanotubo.

(d) Impostare infine il problema quando si tenga conto della massa del cavo (facoltativo).

Dati utili: raggio Terra $R \simeq 6 \times 10^6$ m ; massa Terra $M \simeq 6 \times 10^{24}$ kg ; frequenza angolare di rotazione della Terra $\omega \simeq 7 \times 10^{-5}$ rad sec^{-1} ; costante gravitazione $G \simeq 7 \times 10^{-11}$(N m^2/kg^2) .

(altri problemi sul retro)

Problema 4. Si consideri un contenitore cilindrico rigido e termicamente isolato diviso da una parete mobile parallela alle basi del cilindro in due parti A e B contenenti ciascuna una mole dello stesso gas ideale. La parete impedisce scambi di particelle e di calore tra le due parti. Inizialmente, la posizione della parete è bloccata al centro del contenitore e il sistema è all'equilibrio con le due parti allo stesso volume $V_A(0) = V_B(0)$, ma temperature diverse $T_A(0) > T_B(0)$. Ad un certo istante, la parete mobile viene lasciata libera di scorrere senza attrito mantenendosi parallela alle basi del cilindro e il sistema, dopo un rapido transiente, raggiunge una nuova condizione di equilibrio. Determinate i valori della pressione $P_A(f)$ e $P_B(f)$ nelle due parti del sistema una volta raggiunta la nuova condizione di equilibrio.

Problema 5. Consideriamo che la forza di resistenza fluidodinamica di intensità F_L che si contrappone al movimento a velocità V di una sfera (di raggio R, omogenea, di densità ρ) all'interno di un fluido incomprimibile (di densità ρ_W, e che possiamo considerare contenuto dentro un tubo di raggio $A \gg R$) valga:

$$\vec{F_L} = -\alpha\vec{V} \qquad (*)$$

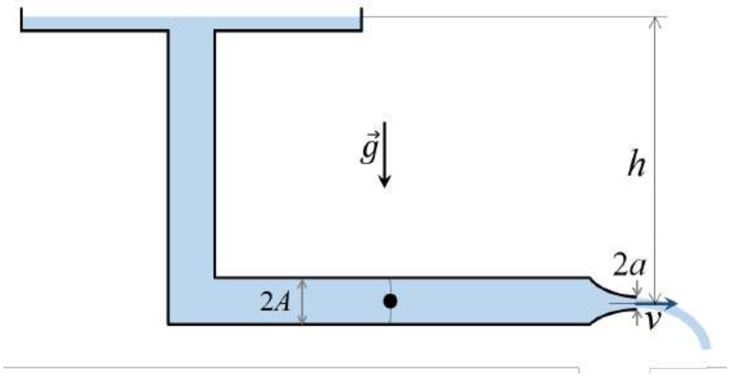
(a) Consideriamo un esperimento in cui il fluido sia contenuto nel tubo posto in verticale e chiuso inferiormente, e la sfera venga posizionata all'interno del tubo a varie distanze sotto la superficie superiore del liquido e lasciata libera di muoversi.
La sfera lasciata libera nel liquido risale fino alla superficie superiore; all'equilibrio galleggia lasciando una calotta sferica fuori dal liquido.

distanze (cm)	tempi (s)
100	1.77
200	2.85
300	3.87
400	4.86
500	5.87

La tabella a lato riporta i tempi di risalita misurati con una precisione del centesimo di secondo (tempi) in funzione della distanza sotto la superficie del liquido a cui viene lasciata la sfera (distanze). L'incertezza sulle distanze percorse dalla sfera si può considerare di 1 cm.

I dati conosciuti sono i seguenti: $\rho_W = 1.000$ g/cm^3; volume della sfera $V_R = 500 \pm 15$ cm^3; volume della calotta fuori dal liquido pari a $V_C = 50 \pm 2$ cm^3; per svolgere i calcoli, considerare l'accelerazione di gravità $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ senza incertezza.
Determinare α con un'incertezza relativa di $\sim$6% (o al più di poco migliore).

(b) Consideriamo ora la situazione in cui una riserva del fluido sia contenuta in un recipiente di sezione molto maggiore di quella del tubo sopra considerato. Il fluido si scarica verso l'esterno attraverso il tubo, come mostrato nella figura sottostante, uscendo da un'apertura circolare di raggio $a < A$ posta a distanza h sotto il livello del fluido nel recipiente (trascurare le differenze di pressione atmosferica).



Scrivere l'espressione per la velocità v in uscita dal foro in funzione delle variabili del problema (non servono calcoli numerici) nelle due ipotesi in cui ci sia o non ci sia la sfera sopra descritta mantenuta ferma all'interno del tubo come nel caso raffigurato in figura. Trascurare l'interazione del fluido con le pareti del tubo, altre forze all'interno del fluido (a parte quelle già considerate nell'equazione $(*)$ sopra) e variazioni di temperatura.
Spiegare qualitativamente da dove deriva la differenza di velocità nei due casi.

Ammissione al I anno - Corso Ordinario, Chimica. Anno Accademico 2023/24

Prova Scritta di Chimica

25/08/2023

Esercizio 1

Date le seguenti formule minime:

NO_2^+	$SnCl_2$	BrF_3	BrF_5	SO_2
OF_2	ICl_4^-	PF_6^-	ZrF_7^{3-}	XeO_3
C_3H_6				

Disegnare per ogni caso la formula di struttura di Lewis e determinarne la geometria spaziale. In caso possano esistere forme isomeriche, disegnarle esplicitamente. Inoltre indicare:

a. L'ibridazione dell'atomo centrale.

b. Se la struttura è chirale e se esistano elementi di simmetria.

c. Se la molecola è polare. In tal caso, la direzione del momento di dipolo.

Esercizio 2

Si bilancino le seguenti reazioni redox eventualmente completando con le specie mancanti:

(a) $Mn^{2+} + BiO_3^- \rightarrow MnO_4^- + Bi^{3+}$, in soluzione acida.

(b) $ClO_3^- + Cl^- \rightarrow Cl_2 + ClO_2$, in soluzione a pH = 4.7.

(c) $CH_3OH + MnO_4^- \rightarrow CO_3^{2-} + MnO_4^{2-}$.

Esercizio 3

Considerare 25 mL di una miscela di acido cloridrico (HCl) ed un acido debole HA (con $K_a = 1.00 \times 10^{-4}$). La miscela in oggetto ha una concentrazione pari a 0.12 M in HCl e 0.08 M in HA. Tale miscela viene titolata con KOH 0.10 M.

Calcolare il pH nei seguenti casi :

a. la miscela iniziale;

b. la soluzione risultante dopo l'aggiunta di 5.00 mL di NaOH;

c. la soluzione risultante dopo l'aggiunta di 29.00 mL di NaOH;

d. la soluzione risultante dopo l'aggiunta di 40.00 mL di NaOH;

e. la soluzione risultante dopo l'aggiunta di 55.00 mL di NaOH.

Commentare i risultati ottenuti.

Esercizio 4

a. Calcolare la solubilità del carbonato di calcio $CaCO_3$ sapendo che il pH di una soluzione satura di $CaCO_3$ è pari a 10. Si considerino i seguenti equilibri:

(i) $CaCO_3(s) \rightleftharpoons Ca^{2+}_{aq} + CO^{2-}_{3(aq)}$, $K_{ps} = 3.31 \times 10^{-9}$;

(ii) $CO_{3(aq)}^{2-} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons HCO_{3(aq)}^{-} + OH_{(aq)}^{-}$, $K_{b1} = 2.14 \times 10^{-4}$;

(iii) $HCO_{3(aq)}^{-} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons H_2CO_{3(aq)} + OH_{(aq)}^{-}$, $K_{b2} = 2.24 \times 10^{-8}$;

b. L'analisi di un campione di acqua ha prodotto i seguenti risultati: pH = 7.4, $[HCO_3^-] = 1.3 \times 10^{-3}$ M, $[Ca^{2+}] = 2.7 \times 10^{-4}$ M. In queste condizioni, verificare se la soluzione è satura, sovrasatura o sottosatura rispetto alla precipitazione del $CaCO_3$ sapendo che $K_{ps}(CaCO_3) = 3.31 \times 10^{-9}$ e $K_{a2}(H_2CO_3) = 5.0 \times 10^{-11}$.

Esercizio 5

Il fattore di comprimibilità di un gas è definito nel seguente modo in funzione del volume molare V_m:

$$Z = \frac{V_m}{V_m^{ideale}}$$

a. definire Z per un gas ideale e disegnare schematicamente un grafico con l'andamento di Z in funzione della pressione P.

b. Data l'equazione di stato per i gas reali:

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

disegnare schematicamente il grafico di Z in funzione di V per un gas reale in cui: (i) a è piccolo; (ii) b è piccolo. Fornire inoltre una interpretazione chimico-fisica del risultato.

c. Nel caso in cui le molecole del gas siano trattate come sfere di raggio r (e quindi per un volume molecolare $V_{mol} = \frac{4}{3}\pi r^3$), dimostrare che il parametro b dipende da V_{mol} secondo l'equazione $b = 4N_A V_{mol}$. Considerare che la distanza tra i centri di due molecole non possa essere inferiore a $2r$.

Esercizio 6

Dissertazione: Trattare gli aspetti peculiari della cinetica chimica, anche in riferimento a selezionati casi specifici.

Prova I anno Scienze Biologiche

Quesito 1
Il termine "polarità" ha più di un significato in chimica biologica.
a) cosa si intende per “polarità” di una catena polipeptidica?
b) cosa si intende per “polarità” di un legame chimico?
c) In che modo i significati differiscono?
d) Qual’è la differenza fra polarità polipeptidica e polarità fosfolipidica?

Quesito 2
In un ingegnoso esperimento eseguito nel 1962, una cisteina già attaccata al suo tRNA fu convertita chimicamente in alanina. Queste molecole di tRNA "ibride" sono state quindi aggiunte a un sistema di traduzione privo di cellule da cui erano stati rimossi i normali tRNA di cisteina. Quando la proteina risultante è stata analizzata, si è scoperto che l'alanina era stata inserita in ogni punto della catena polipeptidica dove si supponeva si trovasse la cisteina.
a) Che tipo di componenti deve avere un sistema di traduzione privo di cellule?
b) Cosa determina normalmente l’attacco di un aminoacido ad uno specifico tRNA?
c) Cosa dimostra il risultato dell’esperimento?
d) Ha senso parlare di codice di tRNA?

Quesito 3
a) Quali dei seguenti punti descrive le relazioni di codifica (templato → prodotto) per la replicazione, trascrizione e traduzione?

A. DNA → DNA
B. DNA → RNA
C. DNA → protein
D. RNA → DNA
E. RNA → RNA
F. RNA → protein
G. Protein → DNA
H. Protein → RNA
I. Protein → protein

b) Ci sono altre due relazioni templato->prodotto che sono state osservate. Quali sono?
c) Sapresti indicare qualche esempio di organismo, o agente, che le utilizza?

Quesito 4

E’ difficile ottenere l’informazione circa il processo del trasferimento genico dal genoma mitocondriale a quello nucleare negli animali perché ci sono poche differenze tra i loro genomi mitocondriali. Lo stesso set di 13 (o occasionalmente 12) geni codificanti proteine è codificato in tutti i numerosi genomi mitocondriali animali che sono stati sequenziati. Nelle piante troviamo una situazione diversa, con un numero maggiore di proteine codificate nei genomi mitocondriali. L’analisi delle piante può quindi fornire importanti informazioni nel processo di trasferimento genico. Il gene respiratorio Cox2, che codifica la subunità 2 della citocromo ossidasi, è stato trasferito funzionalmente al nucleo durante l’evoluzione delle piante da fiore. Un’analisi estensiva dei generi delle piante ha definito l’emergenza temporale della forma nucleare del gene ed identificato diversi intermedi probabili che hanno portato alla perdita completa dal genoma mitocondriale. Un riassunto delle distribuzioni del gene Cox2 tra mitocondrio e nucleo, assieme all’informazione della trascrizione, è mostrato nella Figura 1 assieme all’albero filogenetico.

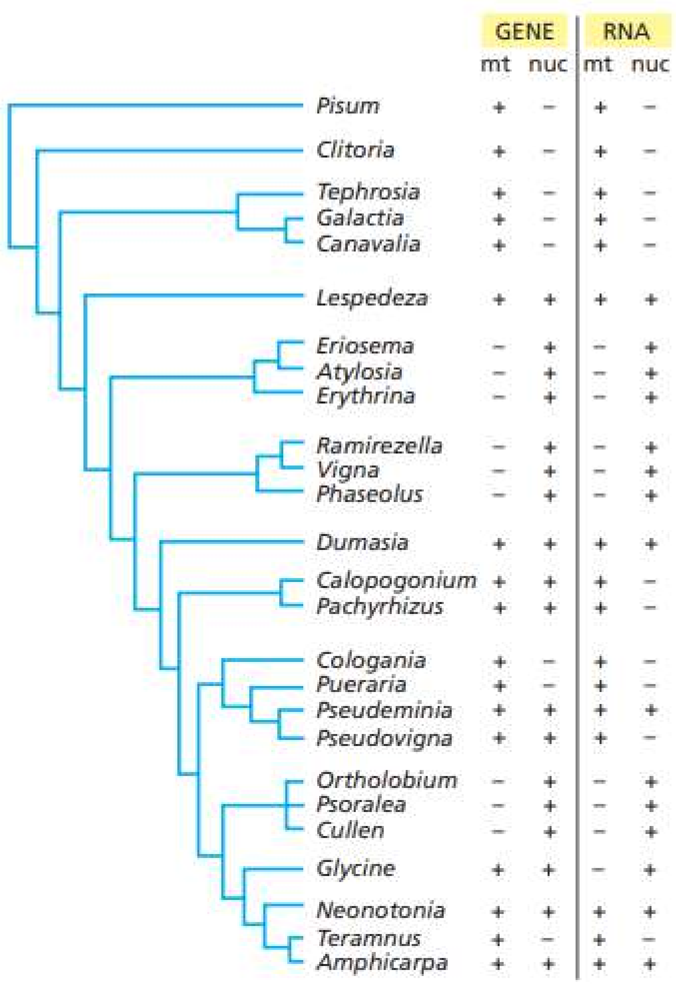


Figura 1: riassunto della distribuzione del gene Cox2 e dei dati di trascrizione nel contesto dell’albero filogenetico. La presenza del gene intatto o del trascritto funzionale è indicato dal (+); l’assenza del gene intatto o del trascritto funzionale è indicato dal (-). Mt=mitocondrio; nuc=nucleo

a) Assumendo che il trasferimento del gene mitocondriale al nucleo sia avvenuto solo una volta (un’assunzione supportata dalle strutture dei geni nucleari), indicate il punto nell’albero filogenetico dove il trasferimento è avvenuto.

b) Ci sono esempi di generi dove il gene trasferito e il gene mitocondriale appaiono entrambi essere funzionali? Indicateli.
c) Qual'è il numero minimo di volte che il gene mitocondriale è stato inattivato o perso? Indicate questi eventi sull'albero filogenetico.
d) Qual'è il numero minimo di volte che il gene nucleare è stato inattivato o perso? Indicate questi eventi sull'albero filogenetico.
e) Sulla base di queste informazioni, proponete uno schema generale per il trasferimento dei geni mitocondriali al genoma nucleare.

Quesito 5
Recentemente è stata recuperata una ciocca di capelli di un essere umano vissuto 300 anni fa.
a) Che tipo di informazioni possono aspettarsi di trovare gli scienziati incaricati di analizzare tale campione biologico?
b) Sapendo che tale individuo morì per cause naturali, secondo te è possibile (ed eventualmente perché) risalire alle cause del suo decesso? Quali potrebbero essere le eventuali limitazioni?
c) Supponendo di avere a disposizione i capelli di un quantitativo cospicuo di individui vissuti nella stessa area geografica e nel medesimo periodo del soggetto preso in analisi, è secondo te possibile estrarre delle informazioni riguardanti l'ambiente/società/comunità di quel tempo? Perché?

Quesito 6
Sei coinvolto in un progetto che studia l'ingresso di una piccola molecola X in una cellula. I tuoi dati dimostrano che il trasporto di X ha le seguenti proprietà:
I. X si muove attraverso la membrana in entrambe le direzioni.
ii. X si sposta dal compartimento a più alta concentrazione al compartimento a bassa concentrazione.
iii. Non è necessaria alcuna fonte di energia affinché X si muova attraverso la membrana.
iv. All'aumentare della differenza di concentrazione attraverso la membrana, la velocità di trasporto X raggiunge un massimo.

Sulla base di queste osservazioni,
a) quali sono le caratteristiche di questo trasporto?
b) Descrivi il meccanismo proposto nel contesto dei meccanismi di trasporto biologico che conosci.
c) Come cambierebbe la tua risposta se l'esaurimento dell'ATP bloccasse il trasporto?

Quindi studi il movimento attraverso la membrana dello ione cloruro (Cl^-). Misuri che la cellula ha una concentrazione interna di ioni cloruro di 50 mM, mentre all'esterno la concentrazione di ioni cloruro è di 100 mM. La tua misurazione dimostra anche che la membrana è permeabile al Cl^- ma è necessaria energia per far fluire gli ioni Cl^- nella cellula.
d) Come spiegare questo risultato sperimentale?