

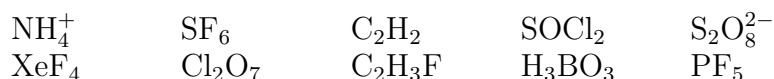
Ammissione al I anno - Corso Ordinario, Chimica. Anno Accademico 2024/25

Prova Scritta di Chimica

26/08/2024

Esercizio 1

Date le seguenti formule minime:

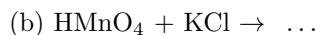
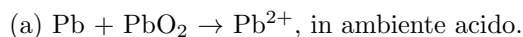


Disegnare per ogni caso la formula di struttura di Lewis e determinarne la geometria spaziale. In caso possano esistere forme isomeriche, disegnarle esplicitamente. Inoltre indicare:

- L'ibridazione dell'atomo/i al centro della struttura.
- Se la struttura è chirale e se esistano elementi di simmetria.
- Se la molecola è polare. In tal caso, la direzione del momento di dipolo.

Esercizio 2

Si bilancino le seguenti reazioni redox eventualmente completando con le specie mancanti:



Esercizio 3

Una quantità pari a 0.05 g di una sostanza incognita viene bruciata, fornendo 0.112 g di anidride carbonica, 0.069 g di acqua e 11.2 mL di azoto gassoso a 20 °C e 700 torr. Quando un grammo di tale sostanza viene sciolto in 100 g di benzene, si ha un abbassamento crioscopico pari a 0.84 °C. Sapendo che la costante crioscopica molale del benzene è $k_c = 2.57$, determinare la formula bruta della sostanza.

Esercizio 4

- Calcolare il pH di una soluzione acquosa di 25.00 mL contenente sia acido cloridrico in concentrazione 0.12 M che un acido monoprotico debole in concentrazione 0.08 M ($k_a = 10^{-4}$).
- Calcolare il pH della soluzione precedente quando vengono aggiunti, rispettivamente, 0.05 mL e 29.00 mL di KOH 0.10 M. Si commentino i risultati.

Esercizio 5

Il fattore di comprimibilità di un gas Z può essere espresso come

$$Z = \frac{V_m}{V_m^{\text{ideale}}}$$

dove V_m rappresenta il volume molare. Si consideri ora la seguente equazione di stato di un gas reale:

$$p = \frac{RT}{V_m} - \frac{B}{V_m^2} + \frac{C}{V_m^3}$$

Un punto critico è caratterizzato da derivata prima e seconda nulla della pressione rispetto al volume a temperatura costante. Calcolare le costanti critiche dei gas in funzione di B e C . Calcolare il fattore di comprimibilità del gas al punto critico.

Esercizio 6

Dissertazione: Si descriva il processo di elettrolisi, anche avvalendosi di esempi espliciti.

QUESITI DI BIOLOGIA - PROVA SCRITTA 26 AGOSTO 2024

AMMISSIONE I ANNO CORSO ORDINARIO IN SCIENZE BIOLOGICHE

QUESITO 1

Nel 1958 John Gurdon (premio Nobel per la medicina 2012) ha eliminato il nucleo da uova di rana appena fecondata e ha inserito al suo posto il nucleo di una cellula epiteliale intestinale (cioè una cellula differenziata) di un girino. Ha poi osservato che lo sviluppo embrionale e la maturazione delle rane generate in questo modo erano del tutto normali.

- Quale conclusione si evince da questo risultato riguardo al processo di differenziamento cellulare della rana e, in genere dei vertebrati?
- Nel 1966 Gurdon ottenne delle rane fertili dallo stesso esperimento di trapianto descritto sopra, pubblicando un articolo scientifico dal titolo "“Fertile” Intestine Nuclei". Quale informazione cruciale aggiunge questa osservazione alle precedenti?
- L'esperimento di Gurdon aveva una bassa efficienza (solo poche cellule uovo completavano lo sviluppo embrionale), tuttavia l'efficienza poteva essere aumentata trapiantando il nucleo di una cellula embrionale di un embrione derivato da trapianto in un'altra cellula uovo (trapianto seriale). Questo risultato è una evidenza sperimentale dei meccanismi epigenetici di controllo dell'espressione genica. Quale fu l'interpretazione di Gurdon che ispirò il titolo della Nobel Lecture 2012 "The Egg and the Nucleus: A Battle for Supremacy"?
- Cosa sarebbe successo se John Gurdon avesse iniettato nuclei di salamandra in un uovo enucleato di rana? Gli embrioni si sarebbero sviluppati in rane, in salamandre o in una sorta di ibrido? Che tipo di problemi di compatibilità genetica possono nascere in un simile "incrocio"?

QUESITO 2

Le moderne tecniche di microiniezione permettono di iniettare nello zigote di un uovo fecondato del pesce zebra (*Danio rerio*) volumi inferiori al nanolitro in modo da non comprometterne il successivo sviluppo embrionale.

Un ricercatore decide di purificare cloroplasti da cellule vegetali in coltura e iniettare questi cloroplasti nel citoplasma dello zigote. Lo sviluppo iniziale degli embrioni non risulta compromesso da questa manipolazione.

Il candidato discuta i possibili esiti di questo esperimento sia in condizioni in cui le larve sono mantenute al buio, sia in condizioni in cui le larve sono mantenute alla luce.

QUESITO 3

Quattro ricercatori sono interessati a studiare la regolazione di una proteina X in neuroni in coltura. I ricercatori stimolano i neuroni aumentando la concentrazione di K^+ nel mezzo di coltura e osservano una diminuita concentrazione di X entro un'ora dalla stimolazione.

Quesito 3.1

Il candidato fornisca una spiegazione del perché un aumento della concentrazione di K^+ rappresenti uno stimolo per i neuroni? (suggerimento: cosa succede al potenziale di riposo?)

I quattro ricercatori ipotizzano ognuno un diverso meccanismo attraverso il quale la stimolazione induce una riduzione nella concentrazione di X:

- Diminuisce la trascrizione del gene che codifica per X
- Diminuisce la traduzione dell'RNA messaggero che codifica per X
- Aumenta la degradazione di X
- Aumenta il rilascio di X nel mezzo di coltura

Assumiamo che uno dei meccanismi di cui sopra sia interamente responsabile per la regolazione di X. I ricercatori hanno a disposizione reagenti e protocolli sperimentali che permettono di:

- i) misurare con precisione la concentrazione dell'RNA messaggero codificante X in campioni biologici
- ii) misurare con precisione la concentrazione della proteina X in campioni biologici
- iii) aggiungere Metionina radioattiva al mezzo di coltura, purificare la proteina X e misurare la radioattività del campione ottenuto

Quesito 3.2

Utilizzando i reagenti e protocolli di cui sopra e avendo a disposizione piastre di coltura contenenti neuroni di controllo o stimolati con KCl, il candidato descriva gli esiti delle indagini i), ii) e iii) nei quattro casi in cui rispettivamente a),b),c) o d) siano veri (suggerimento: le piastre contengono sia i neuroni, sia il mezzo in cui i neuroni sono stati coltivati).

QUESITO 4

- a) Quanti possibili alberi filogenetici possono teoricamente essere disegnati per descrivere l'evoluzione di batteri, archea ed eucarioti, assumendo un unico antenato comune?
- b) E' possibile studiare l'ultimo antenato comune universale? Che tipo di geni considereresti?
- c) I geni dell'RNA ribosomiale sono altamente conservati in tutti gli organismi terrestri, ovvero hanno relativamente pochi cambiamenti di sequenza. Si sono quindi evoluti lentamente nel tempo. Questi geni sono nati "perfetti"?
- d) Diversi genomi procariotici sono stati completamente sequenziati e i loro geni codificanti sono stati contati. Ma come si può riconoscere se una stringa di T, A, C e G contiene un gene?
- e) Quali dei processi elencati in basso non contribuisce in modo significativo all'evoluzione di nuovi geni? Perché no?
 - 1) Duplicazione genica e acquisizione di nuove funzioni da parte delle copie extra
 - 2) Formazione di geni *de novo* per mutazione di DNA non codificante nel genoma
 - 3) Trasferimento orizzontale di DNA tra cellule di specie diverse
 - 4) Mutazione di geni esistenti e acquisizione di nuove funzioni
 - 5) Rimescolamento dei domini all'interno dei geni tramite riarrangiamento genico

QUESITO 5

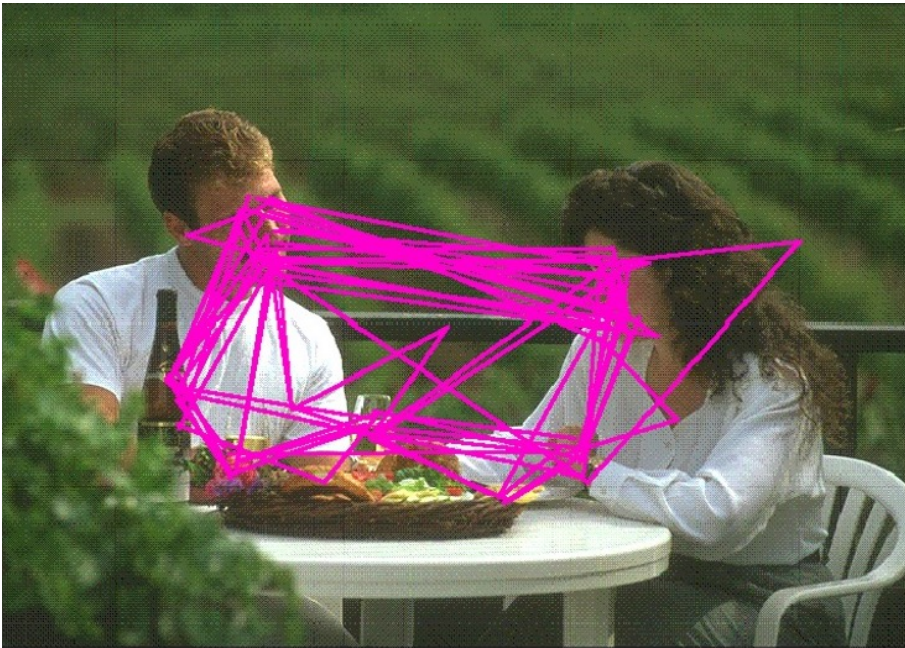
Alcuni geni evolvono rapidamente, altri sono altamente conservati. Ma come facciamo a dire se un gene si è evoluto rapidamente oppure semplicemente è passato molto tempo dalla divergenza dai suoi relativi? Il modo più affidabile è confrontare gruppi di geni tra due specie (es. uomo e ratto). Nella tabella due misure di sostituzione nucleotidica sono indicate: cambi non-sinonimi si riferiscono alle sostituzioni di singolo nucleotide che alterano l'aminoacido codificato. Mutazioni sinonime si riferiscono a cambi che non comportano cambio di aminoacido codificato.

Gene	Amino Acids	Tasso di mutazione	
		Non-sinonimo	Sinonimo
Histone H3	135	0.0	4.5
Hemoglobin α	141	0.6	4.4

Interferon γ	136	3.1	5.5
---------------------	-----	-----	-----

- Come mai ci sono tali differenze tra il tasso di sostituzione nucleotidica sinonima e non-sinonima?
- Considerato che il tasso di sostituzione sinonima sia più o meno lo stesso per tutti e tre i geni, com'è possibile per il gene Histone H3 di resistere così efficacemente alle sostituzioni nucleotidiche che alterano la sequenza aminoacidica?
- Teoricamente, un gene potrebbe essere altamente conservato perché esiste in una regione "privilegiata" del genoma che è soggetta a tassi di mutazione bassi. In base ai dati della tabella, è fondata questa ipotesi? Perché?

QUESITO 6



La figura in alto mostra il tracciato dello sguardo di un soggetto che osserva la scena riprodotta in foto e mostra come i nostri occhi si muovono continuamente per osservare il mondo esterno:

- Perché questo movimento è necessario? Cosa succederebbe alla nostra percezione se gli occhi rimanessero fermi? (giustificare la risposta in base alla vostra conoscenza dell'anatomia e della fisiologia della retina)
- In genere, gli occhi si muovono in modo coordinato e quindi se un occhio si muove verso destra lo fa anche l'altro, ma in alcuni casi gli occhi si muovono l'uno verso destra e l'altro verso sinistra, potete supporre in che caso ciò avviene e perché?
- Quale proprietà della visione è facilitata dai movimenti descritti in foto? A cosa serve?
- Conoscete altri esempi, relativi a sistemi sensoriali oltre il visivo, in cui attraverso il movimento si riesce ad utilizzare funzioni sensorialmente diverse per valutare uno stimolo sensoriale.
- Se poteste costruire una retina, dove mettereste il punto di massima sensibilità alla luce? E quello con la maggiore capacità discriminativa? Specificare con quali elementi biologici (cellule) e con che disposizione potreste ottenere le capacità funzionali desiderate.

Scuola Normale Superiore

Concorso ordinario

Ammissione al primo anno

Prova integrata di Matematica e Fisica

27 agosto 2024

Esercizio 1. Siano a, b, c numeri reali, con b, c non entrambi nulli e consideriamo una funzione del tipo

$$f(x) = a + b \sin x + c \cos x,$$

che è periodica di periodo 2π . Dimostrare che essa non può essere periodica di alcun periodo minore di 2π . Mostrare però che se p è un numero qualunque esistono valori di x per cui $f(x+p) = f(x)$.

Esercizio 2. Grazie ad una cura, le cellule infiammate di un organo si dimezzano ad ogni intervallo temporale, salvo una piccola ricrescita, sempre più debole nel tempo. Supponiamo che la percentuale Q_n di cellule infiammate al tempo n segua la regola:

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2}X_n$$
$$Q_0 = 1$$

dove X_n vale 2^{-n} con probabilità $p \in (0, 1)$ indipendente da n , zero altrimenti, e le X_n sono indipendenti tra loro.

1. Siano m_n e M_n il minimo ed il massimo valore che può assumere Q_n . Trovarli e calcolare le loro probabilità. Calcolare inoltre la probabilità che Q_5 valga $\frac{1}{8}$.
2. Nel modello precedente, la percentuale di cellule infiammate tende a zero per $n \rightarrow \infty$, qualunque esito aleatorio abbiano avuto le grandezze X_n . Modifichiamo il modello: supponiamo che X_n valga 1 con probabilità $\frac{1}{2}$, zero altrimenti, le X_n sempre indipendenti tra loro. In questo caso dimostrare che la probabilità che il minimo tra $Q_{k+1}, Q_{k+2}, \dots, Q_{k+10}$ sia strettamente inferiore a $\frac{1}{2}$ è inferiore a 10^{-3} per qualsiasi k .

Esercizio 3. Sia $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ una sequenza di quattro numeri reali. Indichiamo con $D(x)$ la massima differenza tra due elementi di x , non necessariamente consecutivi, e definiamo la funzione

$$\phi(x) = [|x_2 - x_1|, |x_3 - x_2|, |x_4 - x_3|, |x_1 - x_4|]$$

che trasforma x in un'altra sequenza di quattro numeri reali. Ci interessiamo al comportamento della successione

$$x, \phi(x), \phi^2(x), \phi^3(x), \dots$$

dove la notazione $\phi^k(x)$ indica la sequenza ottenuta applicando k volte la trasformazione ϕ alla sequenza x (quindi per esempio si ha $\phi^2(x) = \phi(\phi(x))$, $\phi^3(x) = \phi(\phi(\phi(x)))$ e così via).

1. Si dimostri che per ogni x vale $D(\phi(x)) \leq D(x)$ e che, se x_1, x_2, x_3, x_4 sono distinti, vale la disuguaglianza stretta.
2. Data una sequenza $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$, definiamo le seguenti operazioni su x :

rotazione: $[x_1, x_2, x_3, x_4] \rightarrow [x_2, x_3, x_4, x_1]$,

riflessione: $[x_1, x_2, x_3, x_4] \rightarrow [x_4, x_3, x_2, x_1]$.

Sia y la sequenza ottenuta da x applicando una rotazione o una riflessione. Si dimostri che, se $\phi^k(x)$ è la sequenza nulla per qualche intero positivo k , allora anche $\phi^k(y)$ è la sequenza nulla.

3. Diciamo che x è monotona se per qualche $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ vale $x_{[i]} \leq x_{[i+1]} \leq x_{[i+2]} \leq x_{[i+3]}$ oppure $x_{[i]} \geq x_{[i+1]} \geq x_{[i+2]} \geq x_{[i+3]}$, dove $[i]$ indica il resto della divisione intera di i per 4. Si dimostri che, se x non è monotona, si ha $\phi^6(x) = [0000]$.

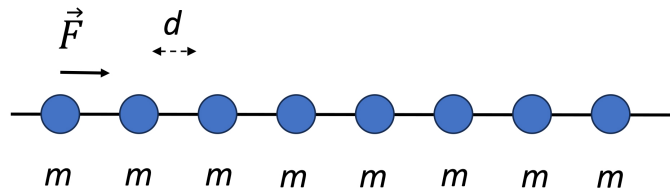


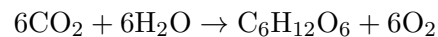
Fig. 1: Perline allineate

Esercizio 4. Lungo un filo rettilineo orizzontale sono infilate tante perline uguali, di massa m e distanti d ciascuna dalla successiva. Le perline, che si possono muovere senza attrito lungo il filo, sono inizialmente in quiete. Una di queste viene accelerata in maniera continua da una forza costante F diretta lungo il filo. Calcolare la velocità asintotica dell'“onda d'urto” nel caso in cui le collisioni siano

1. perfettamente elastiche;
2. completamente inelastiche.

Esercizio 5.

1. La potenza della radiazione solare che colpisce la Terra vale $P_s = 2 \cdot 10^{17} W$. Che percentuale di questa potenza è utilizzata dal processo di fotosintesi se viene liberata una massa di ossigeno pari a $m^*_{O_2} = 2 \cdot 10^{12} t$ per ogni anno? La reazione chimica della fotosintesi è:



Una energia libera di Gibbs pari a $\Delta G = +2868 kJ$ è richiesta per ogni mole di ossigeno liberata.

2. Si stimi il consumo annuale di ossigeno attraverso la respirazione umana ($N^*_{O_2totali}$) considerando una popolazione di $n = 7$ miliardi di persone. Una persona consuma $N^*_{O_2totali} = 1.1 \cdot 10^{22}$ molecole di ossigeno al minuto. Qual è il rapporto tra ossigeno respirato dalle persone e l'ossigeno liberato dalla fotosintesi nell'ambiente per ogni anno?

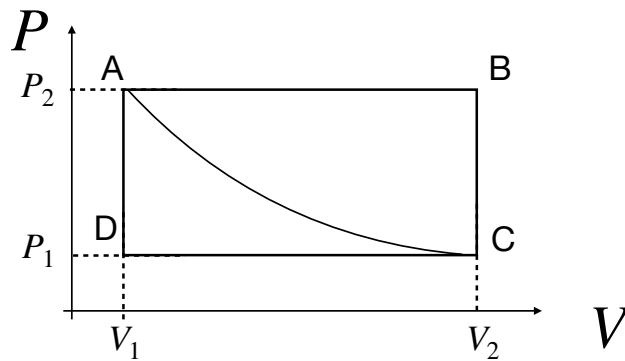


Fig. 2: Cicli termodinamici

Esercizio 6.

Sono assegnate quattro configurazioni di equilibrio per n moli di un gas perfetto monoatomico caratterizzati dai seguenti valori di pressione (P) e volume (V): $A = (P_2, V_1)$, $B = (P_2, V_2)$, $C = (P_1, V_2)$, $D = (P_1, V_1)$ con $V_2 > V_1$, $P_2 > P_1$, e la curva AC è un'isoterma.

Nel limite in cui V_2/V_1 è molto grande, si determini quale tra i seguenti tre cicli termodinamici quasi-statici è caratterizzato dal valore più alto dell'efficienza termica (rapporto tra lavoro eseguito dal sistema e calore assorbito dallo stesso):

$$\begin{aligned}
 \text{ciclo I)} &\equiv A \xrightarrow{\text{isobara}} B \xrightarrow{\text{isocora}} C \xrightarrow{\text{isoterma}} A, \\
 \text{ciclo II)} &\equiv A \xrightarrow{\text{isoterma}} C \xrightarrow{\text{isobara}} D \xrightarrow{\text{isocora}} A. \\
 \text{ciclo III)} &\equiv A \xrightarrow{\text{isobara}} B \xrightarrow{\text{isocora}} C \xrightarrow{\text{isobara}} D \xrightarrow{\text{isocora}} A.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Scuola Normale Superiore
 Concorso ordinario - Ammissione al primo anno
 Prova di Matematica

28 agosto 2024

Esercizio 1. Nel piano Euclideo di coordinate x, y sia L la linea $L := \{y = 1\}$, su cui marchiamo il punto $P = (0, 1)$. Sia C la circonferenza unitaria di centro $(0, 0)$. Supponiamo che L rotoli in senso orario su C senza strisciare, con C fissa. Si descriva la traiettoria del punto marcato in forma parametrica $(x(t), y(t))$.

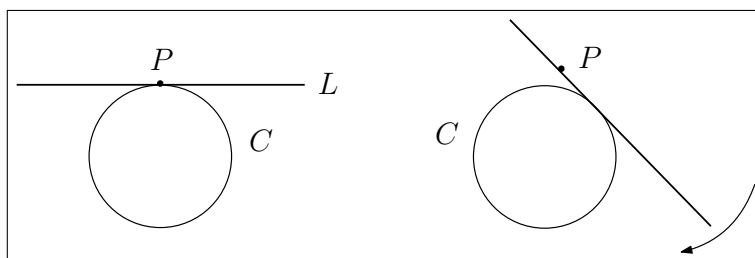


Figura 1: la linea L rotola lungo C

Esercizio 2. Si consideri nel piano un triangolo rettangolo R con cateti di lunghezza 2 allineati lungo gli assi coordinati, di vertice comune $P = (x_0, y_0)$ e orientato come in figura. Il punto P può trovarsi con probabilità uniforme all'interno del rettangolo $S := [-5, 5] \times [-5, 0]$. Una retta orizzontale l ha ordinata distribuita con probabilità uniforme nell'intervallo $[-4, 4]$. Calcolare la probabilità che l ed R si intersechino in almeno un punto del quadrato $Q := [-4, 4] \times [-4, 4]$.

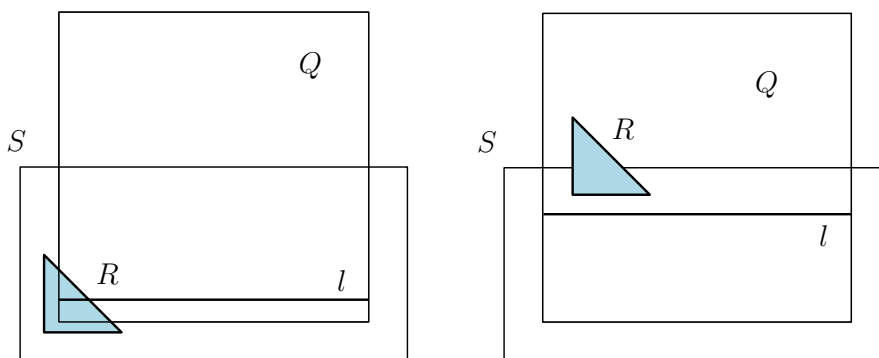


Figura 2: Possibili configurazioni di R ed l

Si fa presente ai candidati che, nella valutazione dei compiti, si terrà conto non solo della correttezza dei risultati ma anche del rigore dei ragionamenti

Esercizio 3. Consideriamo un gioco tra due giocatori A e B basato sui lanci successivi di una moneta, i cui risultati riteniamo indipendenti ed equiprobabili. Il giocatore A ottiene come punteggio, dopo n lanci, la somma di $+1$ per ciascun lancio in cui è uscito testa, -1 per ciascuno in cui è uscito croce; ma con l'ulteriore regola che non appena il suo punteggio è pari a 10 oppure -10 il gioco finisce. Convenzionalmente, quando nel seguito parleremo del "punteggio V_n di A al lancio n -esimo" intenderemo la somma di $+1$ e -1 detta sopra relativamente ad n lanci se il gioco non è ancora finito, oppure $+10$ o -10 nel caso in cui il gioco sia finito prima del lancio n -esimo. Si parte con $V_0 = 0$. Si indichi con $p_n(k)$ la probabilità che V_n valga k .

1. Trovare la media di V_n , giustificando la risposta.
2. Calcolare la probabilità che V_{20} valga zero.
3. Dimostrare che la successione $p_{2n}(0)$ è strettamente decrescente.
4. Calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ della probabilità che V_n valga 10 .

Nota: lasciare la risposta al punto 2 espressa tramite potenze e fattoriali.

Esercizio 4. Un quadrato magico è una disposizione di numeri interi in forma di tabella quadrata in cui siano rispettate due condizioni: i valori siano tutti distinti tra loro e la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna, e in entrambe le diagonali, dia sempre lo stesso risultato: tale intero è denominato "costante magica" del quadrato. Se il lato del quadrato magico è lungo n e gli interi che lo riempiono coincidono con gli interi da 1 a n^2 il quadrato magico si dice perfetto.

1. Quanto vale la costante magica di un quadrato magico perfetto?
2. Esistono quadrati magici di lato 2 ?

Si considerino ora le successioni binarie $(s_k)_{k \geq 0}$ ottenute partendo da 0 e iterando le sostituzioni $0 \mapsto 01$ e $1 \mapsto 10$ su ciascuna cifra binaria ottenuta. Ecco qui i primi cinque termini dell'iterazione

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 01, \quad s_2 = 0110, \quad s_3 = 01101001, \quad s_4 = 0110100110010110.$$

Iterando il procedimento infinite volte, indichiamo con $S(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ la $(i+1)$ -esima cifra di s_i in modo che $S(0) = 0$, $S(1) = 1$, $S(2) = 1$, $S(3) = 0$, $S(4) = 1$, ecc.

Sia $n = 2^m$ con $m \geq 2$. Consideriamo la tabella quadrata T_n costituita dagli n^2 numeri interi

$$T_n(i, j) = S(k)(k+1) + (1 - S(k))(n^2 - k)$$

dove $k = in + j$ e $i, j = 0, 1, \dots, n-1$.

3. Calcolare T_4 e verificare che è un quadrato magico perfetto.
4. Dimostrare che i quadrati T_{2^m} (con $m \geq 2$) sono magici perfetti.

Esercizio 5. Si consideri la funzione F definita sull'intervallo $[0, 1]$ come segue:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{x} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

1. Disegnare il grafico di F . Calcolare $F(F(x))$ e disegnarne il grafico.
2. Sia $x_0 \in [0, 1]$, si consideri la successione definita per ricorrenza $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$, \dots , $x_n = F(x_{n-1})$, $n \geq 1$. Mostrare che se $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ allora la successione x_0, x_1, \dots, x_n è strettamente crescente finché non si ha $x_n \geq \frac{1}{2}$.
3. Ricordiamo che le parti intera $[x]$ e frazionaria $\{x\}$ di un numero reale $x \in \mathbf{R}$ sono definite come

$$[x] = k \in \mathbf{Z} \text{ tale che } x - k \in [0, 1), \quad \{x\} = x - [x].$$

Sia $x_0 \in (0, 1)$ e si ponga

$$m := m(x_0) = \begin{cases} 1 + \min\{n \geq 1, x_n \in [1/2, 1]\} & 0 < x_0 < \frac{1}{2}; \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1. \end{cases}$$

Mostrare che $x_m = \{x_0^{-1}\}$.

Esercizio 6. Siano A_1, \dots, A_n insiemi non vuoti in $\{1, \dots, n\}$ e tali che per $i \neq j$ l'intersezione $A_i \cap A_j$ abbia al più un elemento.

1. Sia r un numero intero compreso tra 1 e n (inclusi), e siano A_{i_1}, \dots, A_{i_r} insiemi distinti in $\{A_1, \dots, A_n\}$. Mostrare che $\sum_{j=1}^r \text{card}(A_{i_j}) \leq n + \binom{r}{2}$, dove $\binom{r}{2}$ indica il coefficiente binomiale e card la cardinalità.
2. Provare che esiste un sottoinsieme S di $\{1, \dots, n\}$ con cardinalità maggiore o uguale a $\frac{[\sqrt{2n}](n - [\sqrt{2n}])}{2n}$ tale che gli A_s per $s \in S$ hanno tutti la stessa cardinalità.

Scuola Normale Superiore
Concorso ordinario - Ammissione al primo anno

Prova di Fisica

29 agosto 2024

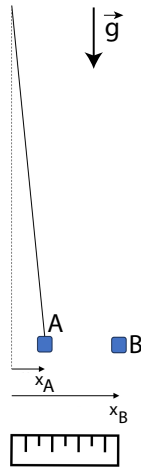


Fig. 1: Coppia di oggetti, uno dei quali è appeso tramite un lungo filo inestensibile.

Esercizio 1. Due oggetti di piccole dimensioni A e B, ciascuno con carica elettrica totale nulla, interagiscono tra loro elettrostaticamente con una forza attrattiva che dipende dalla distanza come $\frac{1}{x^n}$ (dove n è un intero positivo). L'oggetto A è appeso a un punto fisso tramite un lungo filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 150$ cm. Se si avvicina B ad A mantenendo entrambi alla stessa quota, A sposta la propria posizione di equilibrio dalla verticale. Quando la distanza tra i due oggetti scende sotto un certo valore, tuttavia, A si precipita spontaneamente verso B, rimanendovi attaccato. Grazie a un righello disposto orizzontalmente sotto l'apparato, con lo zero sulla verticale del punto di sospensione, otto gruppi indipendenti di studenti/esse misurano i valori delle coordinate x_A e x_B degli oggetti al momento in cui accade quanto descritto. Stimare il valore di n usando i dati riportati nella tabella, possibilmente discutendo le incertezze sperimentali.

Gruppo	x_A (cm)	x_B (cm)
1	1.2	6.8
2	1.3	7.0
3	1.4	6.9
4	1.3	7.0
5	1.1	6.7
6	1.4	6.8
7	1.3	6.8
8	1.4	7.2

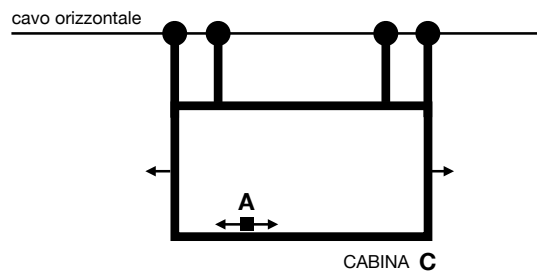


Fig. 2: Cabina con massa puntiforme A .

Esercizio 2.

Una cabina C di una funivia può scorrere senza attrito su un cavo orizzontale (rigido) a cui è vincolata tramite una serie di bracci verticali che ne garantiscono la stabilità impedendo ogni altro movimento (verticale, oscillatorio, trasversale).

Come mostrato in figura, all'interno della cabina, poggiata sul pavimento, si trova una massa puntiforme A che è libera di muoversi in direzione orizzontale, restando a contatto con la base della cabina stessa, al più subendo urti perfettamente elastici con le pareti di C .

Un osservatore esterno che monitora il sistema da lontano nota che, a intervalli regolari di durata ΔT_1 e ΔT_2 , la cabina passa da uno stato di moto S_1 in cui essa si sposta orizzontalmente lungo l'asse con velocità costante V_C , a uno stato S_2 in cui è perfettamente ferma.

Si proponga una spiegazione dell'effetto e si determini il rapporto tra ΔT_1 e ΔT_2 .

Supponendo che l'osservatore possa misurare tali grandezze, nonché le dimensioni geometriche della cabina e la velocità V_C , si determini il rapporto μ tra le masse di C e di A .

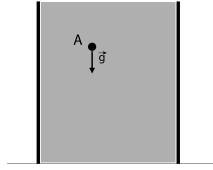


Fig. 3: Particella in un condensatore.

Esercizio 3.

Si consideri una particella puntiforme A di massa m e carica q posta all'interno di un grande condensatore carico, a facce piane parallele orientate rispetto alla verticale come indicato in figura. Immaginando che su A agisca una forza viscosa $\vec{F} = -k\vec{v}$, caratterizzata da un coefficiente costante k , determinare l'energia dissipata dalla particella per secondo, nel limite asintotico di grandi tempi (si assuma che A abbia velocità iniziale nulla e che, durante la sua evoluzione, resti sempre sempre all'interno del condensatore senza urtare le pareti o il terreno; si trascurino eventuali effetti di irraggiamento radiativo).

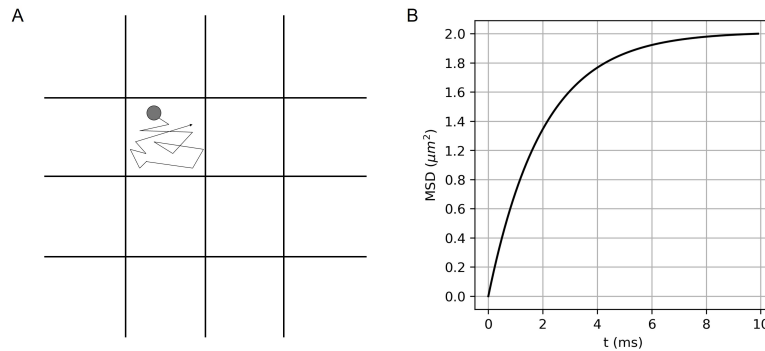


Fig. 4A: configurazione delle celle. Fig. 4B: $\text{MSD}(\mu\text{m}^2)$ in funzione di $t(\text{ms})$.

Esercizio 4.

Una molecola che si muove di moto Browniano sperimenta un confinamento all'interno di una matrice microstrutturata a nicchie quadrate, il cui numero si può considerare infinito (Fig. 4A). Dopo osservazione al microscopio, la legge del moto della molecola, espressa come spazio esplorato (o Mean Squared Displacement, i.e. MSD , μm^2) nel tempo (ms), risulta quella rappresentata in Fig. 4B:

Si chiede di:

1. Stimare la dimensione caratteristica l delle nicchie di confinamento della matrice dalla legge del moto della molecola (curva nera in Fig. 4B), spiegando come si è giunti alla stima.

2. Stimare, disegnandola, la forma della legge del moto in assenza di barriere. Quanto spazio esplora la molecola per unità di tempo?
3. Stimare, disegnandola, la forma della legge del moto in presenza di una barriera strutturata come in Fig. 4A, ma semi-permeabile (ovvero, tale che la probabilità media di attraversarla nell'unità di tempo è non nulla). Illustrare come si potrebbe stimare la probabilità media di attraversamento delle barriere semi-permeabili per unità di tempo da parte della molecola utilizzando la sola legge del moto.
4. Sapendo che la diffusività D ($\mu\text{m}^2/\text{s}$) della molecola all'interno della zona di confinamento è descritta dall'equazione di Stokes-Einstein:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r},$$

dove $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ (J/K) è la costante di Boltzmann, T (K) è la temperatura, η ($\text{Pa} \cdot \text{s}$) è la viscosità dinamica del solvente e r (m) è il raggio idrodinamico della molecola, provare a stimare quest'ultimo assumendo che nelle misure descritte finora la molecola si trovi a temperatura ambiente e in solvente acquoso ($\eta = 8.9 \cdot 10^{-4} \text{Pa} \cdot \text{s}$). Di che specie molecolare può trattarsi?

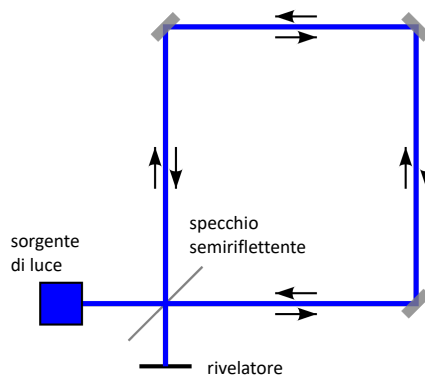


Fig. 5: Interferometro di Sagnac

Esercizio 5.

In figura è schematizzato un interferometro di Sagnac. Un fascio di luce monocromatica viene separato in due direzioni perpendicolari da uno specchio semiriflettente: i due fasci prodotti seguono quindi un cammino chiuso grazie a tre specchi posti ai vertici di un quadrato, percorrendolo in versi opposti.

Se l'apparato ruota rigidamente (rispetto a un sistema inerziale) intorno a un asse perpendicolare al quadrato e posto al centro del medesimo, quando i due fasci si incontrano nuovamente hanno tra loro una differenza di fase che, in prima approssimazione (per velocità degli specchi non relativistiche), è proporzionale alla velocità angolare.

Se si usa un laser con una lunghezza d'onda di 600 nm, e un quadrato di lato $L = 1\text{m}$,

stimare l'ordine di grandezza delle velocità angolari misurabili, supponendo di riuscire a rivelare differenze di fase dell'ordine del percento.

Quanto dovrebbe essere L per rivelare velocità angolari dell'ordine della rotazione terrestre?

Esercizio 6.

L'analisi dimensionale ha un ruolo centrale in Fisica, perché consente di legare diverse quantità sulla base delle loro dimensioni fisiche. Usiamo l'analisi dimensionale per dedurre alcune proprietà dei buchi neri.

1. Trovare la velocità di fuga V_e da un pianeta sferico, in termini della costante di Newton G_N , della massa M del pianeta e del suo raggio R . Un buco nero è un corpo estremamente denso circondato da una superficie sferica ideale, il suo orizzonte, dal quale nulla può uscire, se c , la velocità della luce, è la massima velocità possibile. Legare la dimensione R_s dell'orizzonte di un buco nero sferico alla costante di Newton G_N , alla massa M del buco nero e alla velocità della luce c , utilizzando il precedente risultato.

Si può ora procedere con l'analisi dimensionale verso argomenti di frontiera.

2. a) La "costante di struttura fine" α è una quantità adimensionale che controlla le correzioni quantistiche alla forza di Coulomb tra una coppia di elettroni. Usando nozioni basilari di Elettrostatica, trovare l'espressione di α in termini della carica e dell'elettrone, della costante di Planck \hbar , della costante dielettrica del vuoto ϵ_0 e della velocità della luce c .
b) Trovare la forma della controparte α_G di α per la gravità, basandosi sull'analogia tra le leggi di Newton e Coulomb e su $E = Mc^2$. Mostrare che $\alpha_G(E)$ cresce quadraticamente con l'energia dei due elettroni.
c) A quale energia $\alpha_G(E)$ diventa di ordine uno? Questa energia viene detta "Energia di Planck" E_{Pl} .

Bekenstein e Hawking mostrarono intorno al 1970 che i buchi neri hanno una temperatura, e finiscono con l'evaporare **a causa di effetti quantistici**.

3. Trovare la dipendenza della temperatura T_H di un buco nero (tenendo conto del fatto che è inversamente proporzionale alla sua massa M) da M , M_{Pl} , la velocità della luce c e la costante di Boltzmann k_B . Perché in questo caso è necessario fornire la dipendenza da M ?
4. Sappiamo dalla Termodinamica che la temperatura può essere dedotta dall'Entropia S utilizzando la relazione

$$\frac{1}{k_B T_H} = \frac{dS}{dE},$$

dove E è l'energia interna del sistema. Qui l'unico candidato per E è l'energia di riposo del buco nero, Mc^2 . Legare l'entropia alla massa M , integrando questa equazione. Esprimere il risultato in termini della dimensione R_s dell'orizzonte e

della lunghezza di Planck ℓ_P . Notate che, sorprendentemente, il risultato è proporzionale all'area dell'orizzonte e non al volume da esso racchiuso.

Suggerimenti: Ricordiamo che $\hbar\omega$ è l'energia associata ad un fotone di frequenza angolare ω . La massa di Planck M_{Pl} è determinata dall'Energia di Planck utilizzando $E_{Pl} = M_{Pl}c^2$, e la lunghezza di Planck ℓ_{Pl} è determinata dalla massa di Planck utilizzando $\ell_{Pl}M_{Pl}c = \hbar$.