

**Scuola Normale Superiore, ammissione al IV anno del corso ordinario**  
**Prova scritta di Analisi**  
**26 Agosto 2024**

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione localmente Lipschitziana. Dati  $x_0 \in \mathbf{R}$  ed  $n$  intero, consideriamo la successione per ricorrenza in  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$x_{k+1,n} = x_{k,n} + \frac{1}{n}f(x_{k,n}); \quad x_{0,n} = x_0.$$

Sia ora  $X_n : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$X_n(t) := x_{k,n} \quad \text{per } t \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right); \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

i) Mostrare che esiste  $\delta > 0$  tale che  $X_n \rightarrow \tilde{X}$  uniformemente su  $[0, \delta]$ , dove  $\tilde{X}$  è la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = f(\tilde{X}(t)) & \text{in } [0, \delta]; \\ \tilde{X}(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

ii) Mostrare che, anche quando  $\tilde{X}$  è definita globalmente per tempi positivi, la proprietà di convergenza uniforme può non essere vera su  $[0, +\infty)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $\Omega$  un insieme limitato, semplicemente connesso e regolare in  $\mathbf{R}^2$  (ovvero la frontiera è una curva semplice di classe  $C^1$ ). Sia  $d : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$  la funzione distanza (Euclidea) dal bordo.

- i) Mostrare che esiste almeno un punto in  $\Omega$  dove la funzione  $d$  non è differenziabile.
- ii) Esibire un esempio di insieme  $\Omega$  come sopra per cui l'insieme dei punti dove  $d$  non è differenziabile è costituito da una curva semplice e regolare parametrizzata da un intervallo compatto di  $\mathbf{R}$ .

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema di due equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - axy \\ \dot{y} = bxy - dy \end{cases}$$

dove  $a, r, b, d$  sono costanti strettamente positive.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema.
2. Considerare le equazioni linearizzate in un intorno di ciascuna soluzione di equilibrio trovata e discutere la stabilità lineare degli equilibri.

3. Dimostrare che tutte le orbite con condizione iniziale  $x(0) > 0$ ,  $y(0) > 0$  del sistema sono periodiche.

**Esercizio 4.** Sia  $(G_n)$  una successione di variabili aleatorie (v.a.) indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.) come una v.a.  $G$ . Dato  $h > 0$ , sia  $(X_n)$  una successione di v.a. definita da

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + hX_nG_n \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

1. Supponiamo che  $G$  valga  $+1$  e  $-1$  con egual probabilità e che sia  $h \in (0, 1)$ . Calcolare, il limite quasi certo  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  ed esaminare la convergenza in  $L^p$  della successione  $(X_n)$ , con  $p \geq 1$ .
2. Supponiamo che  $G$  assuma i valori  $+a$  e  $-a$  con egual probabilità  $p > 0$  ed i valori  $+b$  e  $-b$  con egual probabilità  $q > 0$ , con  $0 < a < b$ ,  $2p + 2q = 1$ . Esaminare il limite quasi certo  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  quando  $h \in (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ , trovando una condizione sufficiente per l'esistenza di questo limite, espressa implicitamente nei vari parametri, ed esplicitando cosa accade se  $q = q(b) = o(\frac{1}{\log b})$  per  $b$  sufficientemente grande.

**Esercizio 5.** Sia  $Pr(\mathbf{R})$  l'insieme delle misure di probabilità sui boreliani di  $\mathbf{R}$ . Una famiglia  $\{\mu_t(dx); t \in [0, 1]\}$  di elementi di  $Pr(\mathbf{R})$  indicizzati da  $t \in [0, 1]$  si dirà misurabile rispetto a  $t$  se la funzione  $t \rightarrow \int \phi d\mu_t$  è misurabile per ogni  $\phi \in C_b(\mathbf{R})$  (spazio delle funzioni continue e limitate su  $\mathbf{R}$ ). Nel seguito supporremo sempre questa condizione, tacitamente. Abbrevieremo il simbolo  $\{\mu_t(dx); t \in [0, 1]\}$  col simbolo  $\mu_t$ . Diciamo che una successione  $\{\mu_t^n\}_{n \in \mathbf{N}}$  converge a  $\mu_t$  se  $\int_0^1 (\int \phi(x) \mu_t^n(dx)) \psi(t) dt$  converge a  $\int_0^1 (\int \phi(x) \mu_t(dx)) \psi(t) dt$  per ogni  $\phi \in C_b(\mathbf{R})$ ,  $\psi \in C_b([0, 1])$ . Data una funzione misurabile  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , indicata con  $\delta_{f(t)} \in Pr(\mathbf{R})$  la misura di massa unitaria nel punto  $f(t)$ , troviamo una famiglia  $\{\delta_{f(t)}(dx); t \in [0, 1]\}$ , che abbrevieremo con  $\delta_{f(t)}$ .

1. Costruire una successione di funzioni misurabili  $\{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $f^n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  tali che la successione  $\{\delta_{f^n(t)}\}_{n \in \mathbf{N}}$  converga ad una  $\mu_t$  avente la seguente proprietà: per ogni  $t \in [0, 1]$ , la misura  $\mu_t$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue  $Leb$  sui boreliani di  $\mathbf{R}$ .
2. Data una successione di funzioni misurabili  $\{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$  definite su  $[0, 1]$  tale che la successione associata  $\{\delta_{f^n(t)}\}_{n \in \mathbf{N}}$  converga a  $\mu_t$ , se per certi  $a < b$  e  $c < d$  vale

$$\int_a^b \left( \int_c^d \mu_t(dx) \right) dt > 0$$

allora si dimostri che vale anche

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} Leb(t \in [a, b] : f^n(t) \in [c, d]) > 0.$$

**QUESITI DI BIOLOGIA MOLECOLARE - PROVA SCRITTA 26 AGOSTO 2024**  
**AMMISSIONE IV ANNO CORSO ORDINARIO IN SCIENZE BIOLOGICHE**

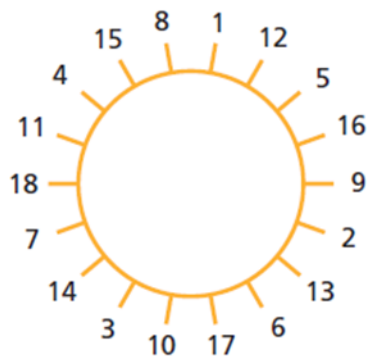
**QUESITO 1**

Sebbene le eliche  $\alpha$  siano elementi di struttura secondaria comuni delle catene polipeptidiche, devono avere una lunghezza minima. Per scoprire come la lunghezza della catena influisca sulla formazione dell' $\alpha$ -elica, si può valutare mediante dicroismo circolare, che misura il contenuto di  $\alpha$ -eliche, una serie di peptidi di lunghezza crescente.

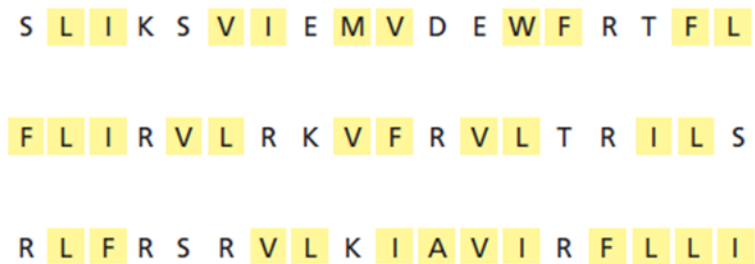
a) Perché non c'è essenzialmente informazione di  $\alpha$ -elica fino ad una lunghezza della catena di almeno 6 amino acidi?

b) Le eliche  $\alpha$  sono spesso immerse in proteine di modo che un lato sia esposto superficialmente e l'altro lato sia rivolto verso l'interno. Tali eliche sono spesso chiamate ampifiliche perché il lato esposto sulla superficie accessibile al solvente è idrofilico mentre il lato interno è idrofobico. Un semplice modo per decidere se una sequenza di aminoacidi forma un'elica ampifilica è sistemando gli amino acidi attorno a quella che è nota come proiezione elica-ruota (**Figura 1A**). Se gli amino acidi idrofobici e idrofilici si separano su lati opposti della ruota, l'elica è detta essere ampifilica. Usate la proiezioni elica-ruota per le tre sequenze peptidiche (**Figura 1B**) e decidete quale (i) formano un'elica ampifilica (la sigla "FAMILY VW" racchiude gli aminoacidi idrofobici).

(A) HELIX WHEEL



(B) PEPTIDE SEQUENCES



**Figura** A) proiezioni elica-ruota; B) sequenze peptidiche da proiettare

c) Che regolarità notate nella disposizione degli aminoacidi a ruota? Che informazioni ci dà circa la struttura dell'elica  $\alpha$ ?

d) In ultima analisi, qual'è il ruolo di un'  $\alpha$  -elica, da un punto di vista strutturale e di ripiegamento delle proteine?

**QUESITO 2**

Esaminate i tre monomeri proteici in **Figura**



**Figura** tre tipologie di monomeri con protrusioni e invaginazioni caratteristiche

a) Dall'arrangiamento delle superfici complementari di legame, indicate da protrusioni e invaginazioni con la stessa forma, decidete quale monomero si assemblerà in un multimeri a forma di anello, quale darà origine ad un multimeri a catena e quale si assemblerà in un multimeri a foglio: Motivate la vostra risposta disegnando i multimeri che si originano dai tre monomeri.

b) Cro è una proteina batterica che lega il DNA per regolare lo spegnimento genico. E' un dimero simmetrico testa-testa. Ciascuna delle due subunità del dimero riconosce una specifica sequenza corta di nucleotidi nel DNA. Se la sequenza dei nucleotidi riconosciuta da una subunità è rappresentata con una freccia (→), di modo che la testa della freccia corrisponda al DNA riconosciuto dalla testa della subunità, quali delle seguenti sequenze nel DNA rappresenterà il sito di legame per il dimero Cro?

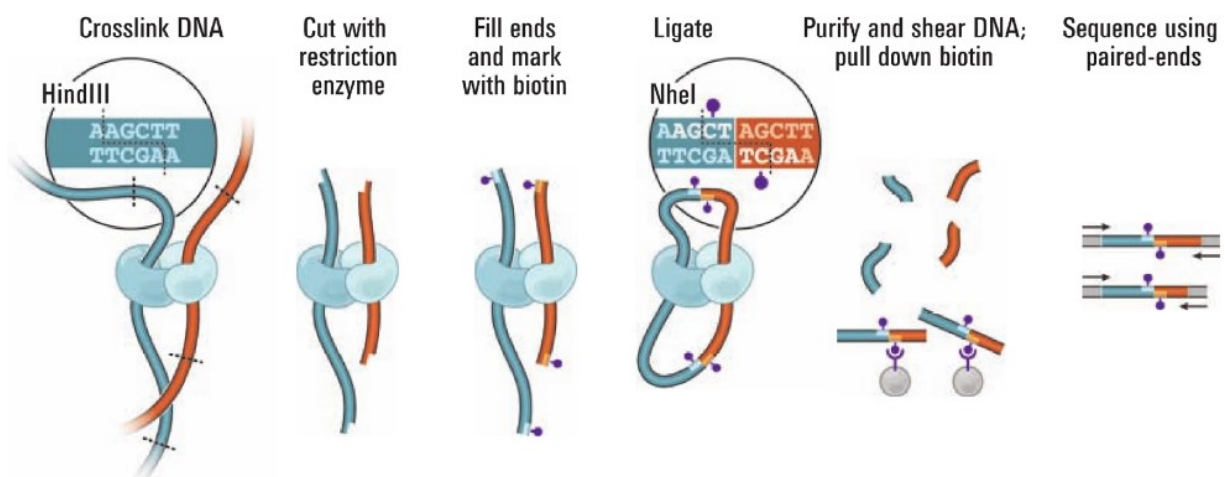
- 1) →→
- 2) →←
- 3) ←←
- 4) ←→

5) Più di una delle precedenti opzioni

c) Perché ci sono numerosi esempi di dimeri testa-testa e coda-coda, ma molto pochi esempi di dimeri testa-coda?

### QUESITO 3

Hi-C è una tecnica genomica ed epigenomica ad alto rendimento per catturare la conformazione della cromatina. Consiste nel seguente disegno sperimentale: purificazione della cromatina interfase, DNA crosslink, taglio con enzima di restrizione, marcatura delle estremità tagliate con biotina, ligazione, purificazione con avidina e taglio dei frammenti di DNA precedentemente ligati, loro sequenziamento con la tecnica di Next Generation Sequencing (NGS) (vedi figura).



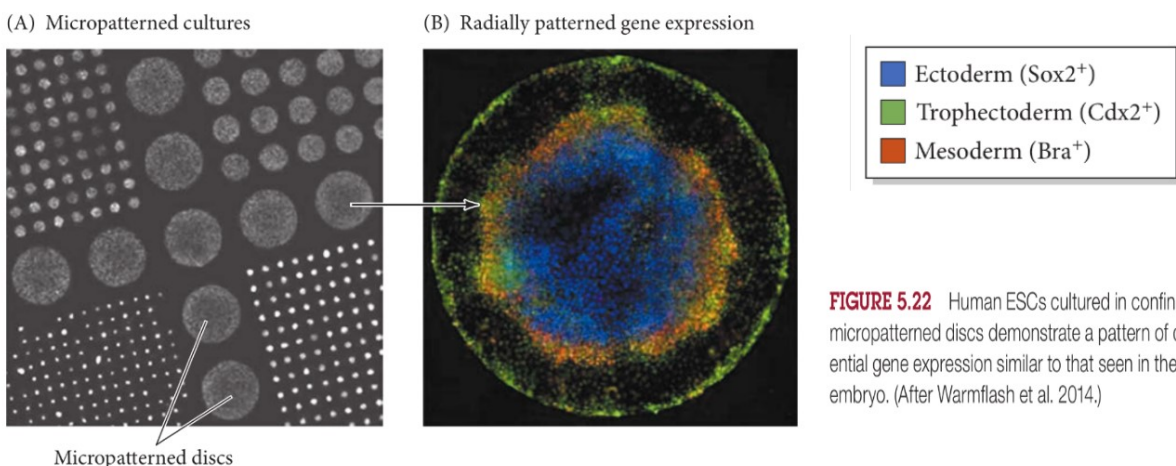
- a) Come può questa tecnica generare un database delle interazioni cromatiniche dell'intero nucleo interfascico di una cellula?
- b) Che tipo di informazione può fornire questo tipo di studio riguardo il superavvolgimento della cromatina interfascica?
- c) Come si possono evidenziare differenze tessuto-specifiche di interazioni cromatiniche con questa tecnica?

#### QUESITO 4

I meccanismi molecolari alla base della separazione fisica e della interazione fra ectoderma, endoderma e mesoderma richiedono adesione differenziale fra i tre tipi di cellule.

- a) E' possibile pensare ad un modello con un solo tipo di adesione ma con forze di adesione diverse fra i tre tipi di cellule, oppure a un modello in cui i tipi di adesione sono specifici per cellule di un determinato strato. Come si può spiegare la separazione dei tre strati utilizzando uno dei due modelli, o entrambi in combinazione?

Cellule della massa cellulare interna di un topo possono essere coltivate adese su superfici di coltura a dimensioni diverse (vedi figura A). La somministrazione di BMP4 e la limitazione dell'area di crescita delle cellule a piccole superfici possono da sole avviare un modello di espressione genica differenziale nella colonia di cellule che si correla a quello dell'embrione precoce (Figura B).



**FIGURE 5.22** Human ESCs cultured in confined micropatterned discs demonstrate a pattern of differential gene expression similar to that seen in the early embryo. (After Warmflash et al. 2014.)

- b) Perché la superficie di crescita influenza la riuscita dell'esperimento?
- c) Come si spiega l'azione di BMP?

#### QUESITO 5

Il Next Generation Sequencing (NGS) permette di analizzare quantitativamente tutti gli RNA messaggeri di una cellula.

- a) Che tipo di normalizzazione del numero di sequenze di cDNA ottenute dal NGS e che ridondanza di sequenziamento è necessaria per ottenere una stima quantitativa dei diversi tipi di RNA messaggeri?
- b) Che tipo di sequenze geniche (esoniche, introniche) sono generalmente considerate per l'analisi quantitativa dei diversi RNA messaggeri e perché?
- c) Che tipi di informazioni ulteriori si possono ottenere facendo una analisi separata di sequenze esoniche e sequenze introniche?

#### QUESITO 6

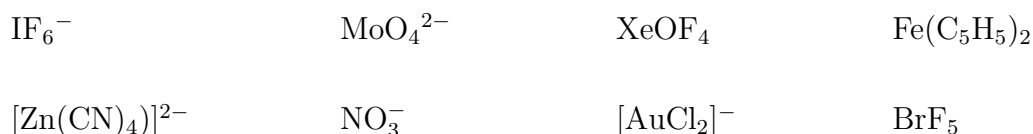
Ammettiamo che una mutazione umana affligga il locus corrispondente al gene per un tRNA causandone delezione.

- a) Quale effetto si può ipotizzare che una mutazione omozigote abbia sulla sintesi proteica?
- b) Questo effetto può essere alleviato dalla somministrazione di uno specifico aminoacido?
- c) Una delezione della corrispondente aminoacyl-tRNA sintetasi ha lo stesso effetto della delezione del corrispondente tRNA sulla sintesi proteica?

**Ammissione al IV anno - Corso ordinario, Chimica. Anno Accademico 2024/25**  
*Prova Scritta di Chimica Generale*  
26/08/2024

**Esercizio 1**

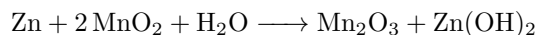
Per i seguenti composti:



- a. si disegnino le strutture molecolari di tutti gli eventuali isomeri;
- b. si indichi il gruppo puntuale di simmetria;
- c. si valuti quali strutture hanno momento di dipolo diverso da zero;
- d. si valuti quali strutture sono chirali.

**Esercizio 2**

Una pila alcalina zinco-carbone deve produrre una corrente di 0.01 A per la durata di 30 giorni. Calcolare le masse di zinco e biossido di manganese che si consumano nel processo di scarica, considerando un rendimento del 94%. La reazione complessiva è:



**Esercizio 3**

$\text{Zn}^{2+}$  e  $\text{NH}_3$  formano i seguenti composti  $\text{Zn}(\text{NH}_3)^{2+}$ ,  $\text{Zn}(\text{NH}_3)_2^{2+}$ ,  $\text{Zn}(\text{NH}_3)_3^{2+}$  e  $\text{Zn}(\text{NH}_3)_4^{2+}$ , con costanti di formazione cumulative ( $\beta_n = [\text{ML}_n]/[\text{M}][\text{L}]^n$ ) rispettivamente di  $\log \beta_n = 2.18, 4.43, 6.74$  e  $8.70$ .

- a. Assumendo una concentrazione di  $\text{NH}_3$  libero e non protonato di 0.1 M, si calcoli la frazione di zinco libero.
- b. Si determinino le concentrazioni di tutti i complessi, assumendo una concentrazione totale di zinco pari a 1.0 M.

**Esercizio 4**

Alla temperatura di 400 K, il gas n-pentano posto in un recipiente chiuso e termostato si trasforma in parte in isopentano ed in parte in neopentano, due isomeri entrambi gassosi. Conoscendo l'energia libera di formazione dei tre gas ( $\Delta G_f(T=400 \text{ K}) = 40.2, 34.4$  e  $37.6$  kJ/mole per, rispettivamente, n-pentano, isopentano e neopentano) determinare la composizione del sistema in condizioni di equilibrio supponendo che le deviazioni dal comportamento ideale delle tre specie gassose siano simili.

**Esercizio 5**

Sapendo che la pressione osmotica dell'acqua di mare a 25°C è di 25 bar ed assumendo un comportamento ideale della soluzione:

- a. Stimare la concentrazione di soluti nell'acqua del mare noto il volume molare dell'acqua pura pari a 0.018 l/mole.
- b. Calcolare la pressione parziale del vapore sopra l'acqua di mare se la tensione di vapore dell'acqua pura nelle stesse condizioni è di 4.6 Torr.

**Esercizio 6**

*Dissertazione:* Si discutano gli effetti che possono alterare l'equilibrio chimico attraverso esempi illustrativi.

Scuola Normale Superiore

Fisica

IV Anno - Prima Prova Scritta 2024

26 agosto 2024

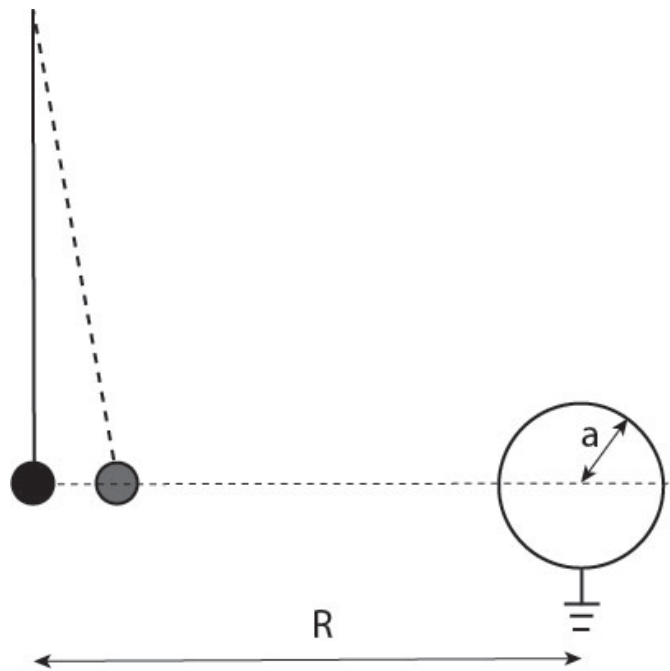


Fig. 1: Pendolo carico nei pressi di una sfera metallica

### Problema 1

Studiare le piccole oscillazioni del pendolo in figura, composto da un filo inestensibile e di massa trascurabile alla cui estremità è appeso un punto materiale di massa  $m$  e carica  $q$ , se ad una distanza  $R$  dalla verticale si trova una sfera metallica ideale di raggio  $a \ll R$  a potenziale  $V = 0$ .

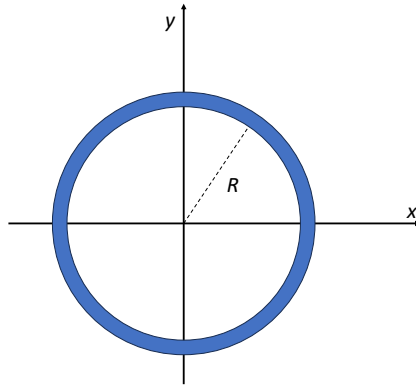


Fig. 2: Generatore di Compton

**Problema 2**

Il generatore di Compton è un apparato per misurare la rotazione della Terra, ed è costituito da un tubo di vetro a forma di anello toroidale pieno di acqua, con alcuni granelli in sospensione per osservare un eventuale moto del fluido.

Il tubo è posto su un tavolo orizzontale e ha un raggio  $R$  molto maggiore del suo diametro interno, come mostrato in figura. Sia definito un sistema di coordinate cartesiane, con origine al centro dell'anello, in cui  $\hat{x}$  è diretto a est,  $\hat{y}$  a nord e  $\hat{z}$  verticalmente. A un certo istante si fa ruotare il tubo di un angolo  $\pi$  intorno all'asse  $\hat{x}$ . Si calcoli la velocità dell'acqua immediatamente dopo la rotazione, in funzione della velocità angolare di rotazione della terra  $\Omega$ , della latitudine del laboratorio e di  $R$ .

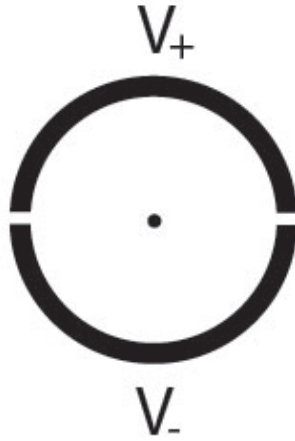


Fig. 3: Due semi-cilindri a diversi potenziali (con una carica puntiforme nel centro)

### Problema 3

Risolvendo l'equazione di Laplace in due dimensioni,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1)$$

con il metodo della separazione di variabili, determinare il potenziale elettrostatico  $V(r, \theta)$  nella regione in figura, che è delimitata dalle sue semi-circonferenze conduttrici di raggio  $R$  dove il potenziale vale  $V_+$  e  $V_-$ .

Come cambia il risultato se all'origine viene inserita una carica puntiforme  $q$ ?

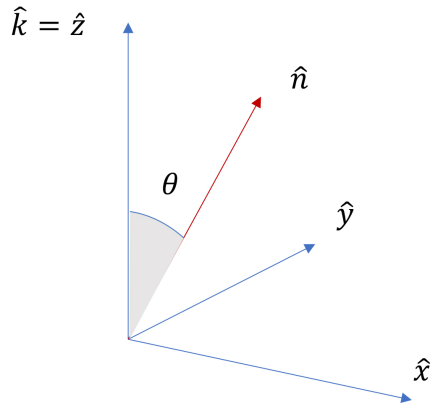


Fig. 4: Radiazione indotta da un'onda monocromatica non polarizzata

#### Problema 4

Un'onda piana monocromatica non polarizzata fa muovere una particella libera di carica  $q$  e massa  $m$  (si assuma il moto della carica non relativistico e circoscritto in una regione di diametro piccolo rispetto alla lunghezza d'onda della luce incidente). Si determini la distribuzione angolare dell'intensità della luce diffusa rispetto alla direzione di incidenza dell'onda piana.

#### Problema 5

Un metodo rudimentale per raffreddare una casa molto calda è accostare ad essa un blocco di marmo molto freddo, e far sì che quest'ultimo assorba il calore dalla casa. Purtroppo chi gestisce il servizio è un entusiasta maldestro che invia il blocco di marmo tramite una slitta di massa  $M$  molto maggiore della massa di marmo, che, non essendo dotata di freni, finisce con lo schiantarsi contro la casa, realizzando un urto completamente anelastico in cui tutta l'energia cinetica viene rilasciata sulla casa (di massa infinita) e trasformata in calore. Assumendo che ad urto avvenuto il blocco di marmo assorba istantaneamente una energia  $Q_0$  dalla casa, calcolare la velocità ottimale  $v$  che deve essere impressa inizialmente alla slitta affinché nel caso in cui la casa disti  $L$  dalla centrale, essa sia rinfrescata nel minor tempo possibile a partire dall'istante in cui il blocco ha lasciato la centrale. Eseguire il calcolo precedente, assumendo che dalla centrale alla casa il moto della slitta sia rallentato da un coefficiente di attrito  $\kappa$  il cui valore può essere considerato piccolo, ma non trascurabile.

# Ammissione al IV anno - Corso Ordinario, Chimica. Anno Accademico 2024/25

Prova Scritta di Chimica Fisica

27/08/2024

## Esercizio 1

*Dissertazione:* Descrivere i fondamenti chimico-fisici della spettroscopia di assorbimento UV-Vis, evidenziandone i tratti caratteristici rispetto ad altre tecniche spettroscopiche.

## Esercizio 2

Si consideri una particella libera la cui funzione d'onda (normalizzata) è rappresentata da un pacchetto gaussiano, che al tempo  $t = 0$  assume la seguente espressione:

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\gamma}} e^{ikx - \frac{x^2}{4\gamma^2}}$$

- Determinare come evolve la funzione d'onda,  $\Psi(x, t)$ , e la densità di probabilità  $|\Psi(x, t)|^2$ .
- Calcolare  $\Psi_p(p, t)$  e  $|\Psi_p(p, t)|^2$ .
- Dimostrare la validità del principio di indeterminazione per questo caso.

## Esercizio 3

Due particelle, ognuna di massa  $M$ , sono soggette a un potenziale armonico monodimensionale del tipo

$$V = \frac{1}{2} kx^2$$

e interagiscono l'una con l'altra tramite una forza attrattiva  $F = -K(x_1 - x_2)$ , dove la costante  $K$  può essere considerata piccola, mentre  $x_1$  e  $x_2$  rappresentano le coordinate delle due particelle nel sistema di riferimento monodimensionale.

- Calcolare le energie dei primi 3 stati.
- Se le particelle sono identiche e prive di spin, quali degli stati ottenuti al punto **a** sono ammissibili?
- Se le particelle sono identiche e dotate di spin pari a  $1/2$ , quanto vale lo spin totale di ogni stato determinato al punto **a**?

## Esercizio 4

Si consideri un sistema termodinamico che rispetta la seguente espressione che mette in relazione entropia ( $S$ ), volume ( $V$ ), energia interna ( $U$ ) e numero di particelle ( $N$ ):

$$S = A [N V U]^{1/3}$$

dove  $A$  rappresenta una costante.

Derivare una relazione tra:

- $U$ ,  $N$ ,  $V$  e la temperatura  $T$ ;
- la pressione  $p$ ,  $N$ ,  $V$  e  $T$ ;

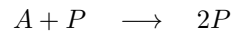
Calcolare la capacità termica a volume costante ( $c_v$ ).

Si considerino ora due sistemi unicamente composti del medesimo materiale e che obbediscono all'equazione di stato precedentemente determinata. I due sistemi condividono gli stessi valori di  $N$  e  $V$ , e si trovano rispettivamente alle temperature iniziali  $T_1$  e  $T_2$ . I due sistemi vengono utilizzati come una sorgente di lavoro,

portandoli ad una temperatura comune  $T_f$ . Questa operazione viene eseguita sottraendo calore al corpo più caldo e donandone una frazione al corpo più freddo, mentre il residuo appare come lavoro. Si determini il range delle possibili temperature finali. Si determini la temperatura  $T_f$  corrispondente alla massima quantità di lavoro, e il valore corrispondente di quest'ultimo a tale temperatura. Si considerino sia processi reversibili che irreversibili nella risoluzione dei vari punti.

### Esercizio 5

Si consideri la seguente reazione



catalizzata dal prodotto ( $P$ ) stesso e caratterizzata da una cinetica del secondo ordine:

$$v = k[A][P]$$

dove la costante di velocità  $k$  è pari a  $2.5 \cdot 10^{-2} \text{ 1/(s}\cdot\text{M)}$ . Supponendo che le concentrazioni di  $A$  e  $P$  iniziali ( $t = 0$ ) siano uguali e di valore pari a  $0.02 \text{ M}$ , si determini il tempo in cui la concentrazione del reagente ( $A$ ) si riduce a  $1/3$  del suo valore iniziale.

### Esercizio 6

Un sistema quantistico arbitrario si trova inizialmente nel suo stato fondamentale  $|0\rangle$ . Al tempo  $t = 0$ , viene applicata una perturbazione  $\Delta\mathcal{H}(t)$  dalla seguente forma:

$$\Delta\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 e^{-t/T}$$

dove  $T$  è una costante. Dimostrare che a un tempo grande la probabilità di transizione dallo stato fondamentale  $|0\rangle$  al primo stato eccitato  $|1\rangle$  è data dalla seguente espressione:

$$P_{0 \rightarrow 1} = \frac{|\langle 0 | \mathcal{H}_0 | 1 \rangle|^2}{\frac{\hbar^2}{T^2} + \Delta\epsilon^2}$$

dove  $\Delta\epsilon$  rappresenta la differenza di energia dei due stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Discutere le approssimazioni, se usate, per giungere a tale risultato.

**Esercizio 1.** Data una matrice quadrata complessa  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , l'immagine numerica di  $A$  è il sottoinsieme compatto di  $\mathbb{C}$  definito come

$$F(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^H A x \mid x \in \mathbb{C}^n, x^H x = 1\}$$

(qui con  $-^H$  denotiamo come al solito la trasposta coniugata). Si può assumere come noto che  $F(A)$  è convesso (è il cosiddetto Teorema di Hausdorff–Toeplitz).

Date due matrici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , la somma diretta  $A \oplus B$  è definita, come di consueto, da

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Ricordiamo inoltre che una matrice quadrata  $A$  è *normale* se  $AA^H = A^H A$ .

- 1) Se  $A$  e  $B$  sono matrici quadrate complesse, determinare  $F(A \oplus B)$  in termini di  $F(A)$  e  $F(B)$ .
- 2) Dimostrare che se  $A$  è normale, allora  $F(A)$  è un poligono convesso i cui vertici sono autovalori di  $A$ .
- 3) È possibile dimostrare che per  $n \leq 4$  vale anche il viceversa dell'affermazione al punto 2. Mostrare mediante esempi che invece per ogni  $n \geq 5$  esistono matrici  $A$  complesse  $n \times n$  non-normali, la cui immagine numerica  $F(A)$  è un poligono convesso i cui vertici sono autovalori di  $A$ .

**Esercizio 2.** Sia  $G$  un gruppo abeliano finito. Una *forma simplettica* su  $G$  è una forma  $\mathbb{Z}$ -bilineare

$$h: G \times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

tale che

- 1)  $h(x, x) = 0$  per ogni  $x \in G$ , e
- 2) per ogni  $x \in G \setminus \{1\}$  esiste  $y \in G$  con  $h(x, y) \neq 0$ .

Determinare per quali valori dell'intero positivo  $m$  esiste un gruppo abeliano finito di ordine  $m$  con una forma simplettica.

**Esercizio 3.**

- 1) Sia  $\Sigma$  una superficie regolare chiusa (compatta e senza bordo) in  $\mathbb{R}^3$ , che supponiamo immersa e senza auto-intersezioni. Per  $\epsilon > 0$ , consideriamo l'insieme

$$\Sigma_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(p, \Sigma) < \epsilon\}.$$

Mostrare che per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo il volume di  $\Sigma_\epsilon$  è una funzione polinomiale di  $\epsilon$  e calcolarne i coefficienti.

- 2) Mostrare che per valori arbitrari di  $\epsilon$  il volume di  $\Sigma_\epsilon$  non è in generale una funzione polinomiale di  $\epsilon$ .

**Esercizio 4.** Sia  $p$  un primo,  $n$  un intero positivo. Denotiamo come al solito con  $\mathbb{F}_{p^n}$  il campo finito con  $p^n$  elementi.

Trovare il grado dei fattori irriducibili del polinomio  $x^{p^n} - x + 1 \in \mathbb{F}_{p^n}[x]$ .

**Esercizio 5.** Consideriamo la sottoalgebra reale di  $\mathbb{C}[z]$  definita come

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{f(z) \in \mathbb{C}[z] \mid f(-i) = \overline{f(i)}\}.$$

Fate vedere che  $A$  può essere scritta come quoziente  $\mathbb{R}[x, y]/(\phi(x, y))$ , dove  $\phi(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  è un polinomio reale che deve essere scritto esplicitamente.

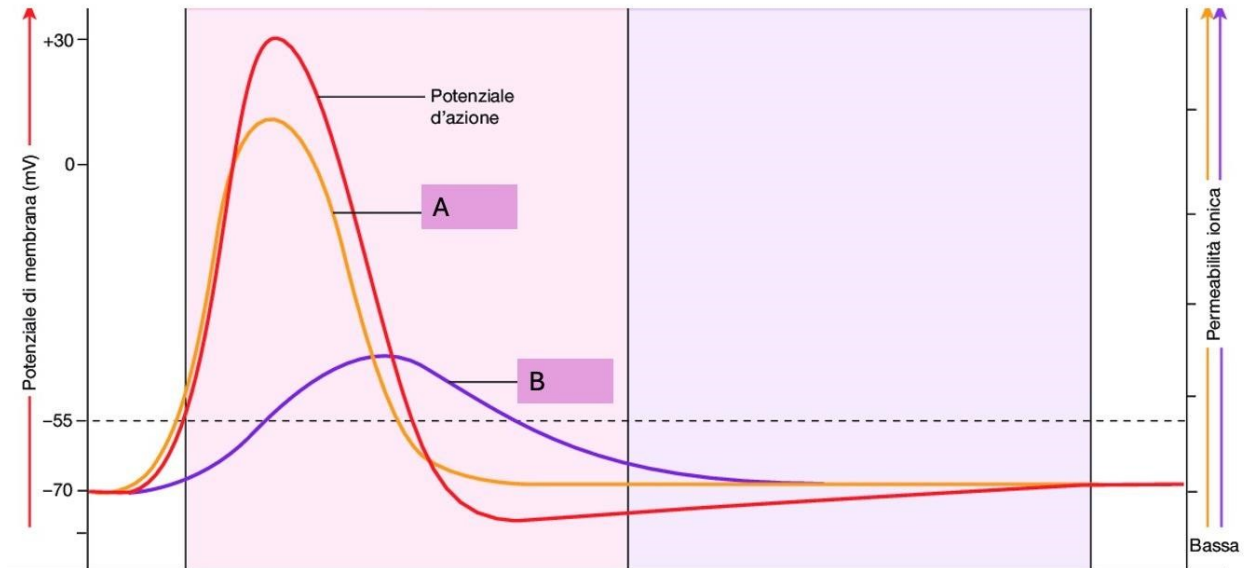
**Esercizio 6.** Sia  $X$  il complemento di due punti in  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ .

- 1) Calcolare il gruppo fondamentale di  $X$ .
- 2) Calcolare il numero di rivestimenti tripli connessi di  $X$ , a meno di isomorfismo.

**QUESITI DI NEUROFISIOLOGIA - PROVA SCRITTA 27 AGOSTO 2024**  
**AMMISSIONE IV ANNO CORSO ORDINARIO IN SCIENZE BIOLOGICHE**

**QUESITO 1**

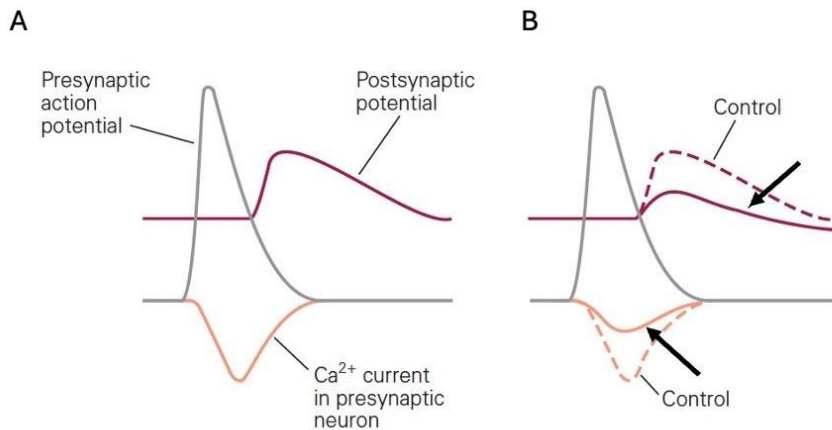
Descrivere il grafico sottostante che rappresenta le fasi del potenziale d'azione (PA) di un neurone



- Cosa rappresentano le curve in A e in B?
- Che tipo di canali del  $\text{Na}^+$  sono coinvolti nel PA? Perché i canali del  $\text{Na}^+$  si chiudono in corrispondenza del picco del PA quando la cellula è depolarizzata?
- Che cosa si intende con il termine periodo refrattario?
- Quale è il meccanismo alla base del periodo refrattario assoluto?
- Durante il periodo refrattario relativo possono insorgere PA? Se sì, o se no spiegarne il motivo.
- Considerando assoni non mielinizzati, la velocità di conduzione sarà maggiore in un assone con diametro 10 $\mu\text{m}$  o 100 $\mu\text{m}$ ? Spiegare il perché.

**QUESITO 2**

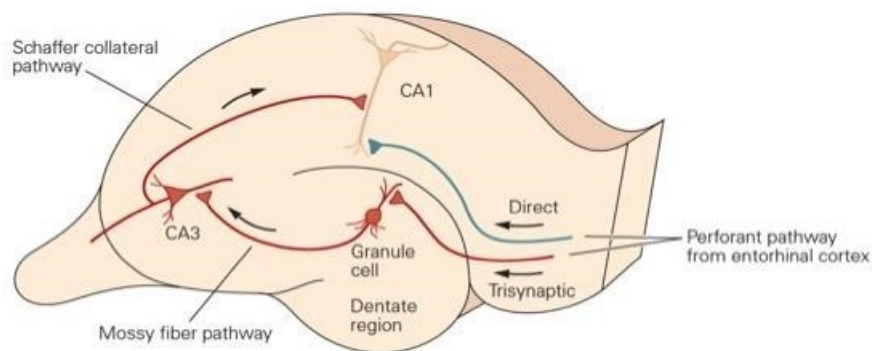
Supponiamo di effettuare un esperimento, in cui registriamo da un circuito neuronale. Gli elettrodi di registrazione sono posti nel neurone presinaptico e nel neurone postsinaptico. Il risultato sono le risposte riportate in A. Durante l'esperimento stimoliamo un altro neurone (detto X) e otteniamo le risposte riportate in B (non tratteggiato, indicato dalla freccia).



- Quale tipo di sinapsi forma il neurone X stimolato?
- Come è l'arrangiamento anatomico delle sinapsi?
- Se il neurone X in oggetto agisse su un recettore a secondo messaggero, che cosa potresti osservare?
- Le sinapsi a secondo messaggero sono modulatrici dell'eccitabilità delle cellule. Che cosa significa?

### QUESITO 3

Supponiamo di effettuare un esperimento. Nella figura, l'elettrodo di stimolazione è sulle collaterali di Schaffer, e quello di registrazione sul neurone postsinaptico piramidale nella regione CA1 dell'ippocampo.



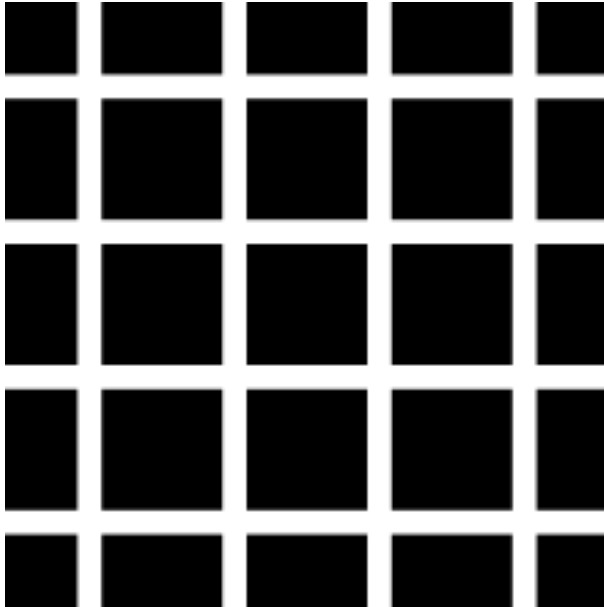
- Se la stimolazione delle collaterali di Schaffer è accoppiata all'eccitazione del neurone CA1, cosa vi aspettate che succeda?
- E se il neurone postsinaptico CA1 viene mantenuto al potenziale di riposo, che cosa vi aspettate che accada?
- Supponiamo di introdurre uno sfasamento temporale tra la stimolazione della collaterale di Schaffer e la depolarizzazione del neurone CA1 post-sinaptico. Cosa vi aspettate che succeda? Sono questi fenomeni dipendenti dall'entità dello sfasamento? Giustificare le risposte identificando i possibili meccanismi biologici coinvolti.

### QUESITO 4

- Le registrazioni dai fotorecettori mostrano che un flash di luce causa una diminuzione del potenziale di membrana verso valori più negativi. Come si spiega questo fenomeno?

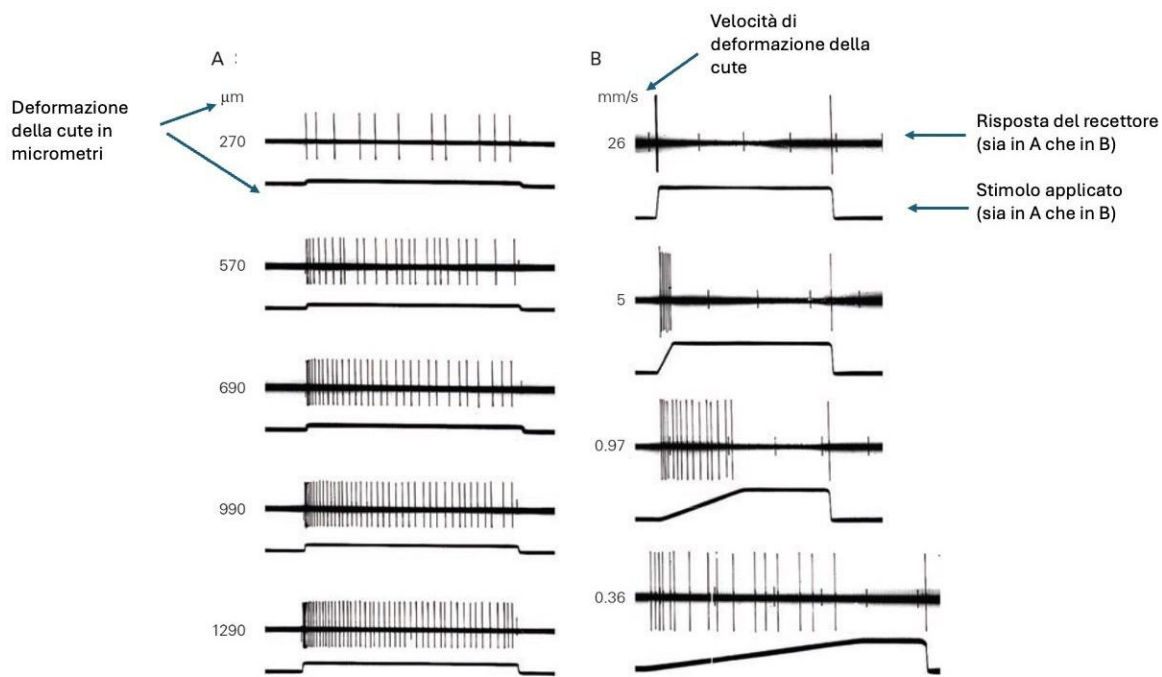
b) Si osserva che mentre sulle cellule bipolari centro-on il glutammato è inibitorio, sulle cellule bipolari centro-off il glutammato è eccitatorio. Spiegare le possibili basi biologiche di questo fenomeno.

c) I neuroni del sistema visivo sono caratterizzati da campi recettivi con un'organizzazione antagonista centro-periferia: spiegare questo concetto. Ipotizzare sulla base di questa conoscenza il meccanismo coinvolto nell'illusione detta griglia di Hermann (Immagine sotto) in cui ci sembra di vedere dei punti più scuri che appaiono e scompaiono all'incrocio delle croci bianchi. Spiegare inoltre perché se fissiamo l'incrocio il punto più scuro all'incrocio fissato scompare.



### QUESITO 5

La figura mostra i risultati di un esperimento in cui nella colonna A si registra da un recettore posto sulla cute (in alto) in funzione di una introflessione della pelle di valore indicato nella colonna con freccia. Le tracce dall'alto verso il basso mostrano risposte a deformazioni di intensità crescente. Nella colonna B abbiamo un altro recettore della cute, in cui osserviamo la risposta del recettore a introflessioni della cute che avvengono con diversa velocità.



a) Cosa si può dedurre da questo esperimento circa la codifica e la diversità dei recettori tattili presenti sulla pelle?

b) Quale utilità percettiva potrebbe avere per il soggetto disporre di questi diversi recettori

## QUESITO 6

Per ciascun muscolo il numero di motoneuroni che lo innerva è diverso.

- Quali potrebbero essere i fattori che determinano il numero di motoneuroni innervanti?
- Quali possono essere le conseguenze funzionali di questa diversità?
- I motoneuroni sono a loro volta controllati dai centri motori superiori. Sapreste indicare schematicamente le vie responsabili del controllo motorio indicandone anche le specificità funzionali?

# Scuola Normale Superiore

## Fisica

### IV Anno - Seconda Prova Scritta 2024

27 agosto 2024

#### Problema 1

Sia  $A$  una particella puntiforme di massa  $m$ , libera di muoversi su una retta sotto l'azione di un potenziale esterno  $V(x)$  ( $x$  essendo la coordinata spaziale). Siano  $\Psi_{in}(x)$  e  $\Psi_{fin}(x)$  due funzioni d'onda di tale sistema, regolari (ossia differenziabili con derivate continue) e caratterizzate dal non avere nodi. Per semplicità assumeremo inoltre che entrambe queste funzioni abbiano ciascuna un unico punto stazionario. Dimostrare che esiste la possibilità di far transire  $A$  dallo stato  $\Psi_{in}(x)$  ad una configurazione che è arbitrariamente vicina a  $\Psi_{fin}(x)$  tramite modulazioni temporali di  $V(x)$ . Cosa cambia nel problema se le due funzioni d'onda hanno numeri di nodi diversi da zero? Nel risolvere l'esercizio si assuma che la dinamica della particella sia non relativistica.

[Suggerimento: il candidato parta dal caso semplice in cui sia  $\Psi_{in}(x)$  che  $\Psi_{fin}(x)$  sono pacchetti Gaussiani]

#### Problema 2

Considerate, nella Meccanica Quantistica unidimensionale, la trasmissione e la riflessione per una barriera con

$$U(x) = -V_0 a \delta(x), \quad (1)$$

e  $V_0 > 0$ , partendo da

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R e^{-ikx} & (x < 0) \\ T e^{ikx} & (x > 0) \end{cases}. \quad (2)$$

1. Calcolare  $R$  e  $T$ ;
2. Studiare le eventuali singolarità di  $R$  e  $T$  nel piano complesso della variabile  $k$ . Qual è il loro significato, e quale è il significato della forma limite della funzione d'onda?;
3. Cosa cambia se  $V_0 < 0$ ?

#### Problema 3

Considerate l'equazione differenziale ordinaria

$$y''(z) - \left(1 + \frac{2}{z^2}\right) y(z) = 0.$$

1. Studiare i punti singolari dell'equazione e descrivere se si tratta di punti regolari o irregolari.

2. Mostrare che

$$y_2(z) = \frac{e^z (1-z)}{z}$$

risolve l'equazione.

3. Mostrare che, per ogni coppia di soluzioni dell'equazione, il Wronskiano

$$w(z) = y_1'(z)y_2(z) - y_2'(z)y_1(z)$$

è indipendente da  $z$ , e sfruttando questa proprietà trovare una seconda soluzione indipendente  $y_1(z)$  dell'equazione.

4. Potete suggerire una derivazione più diretta della seconda soluzione in questo caso?

#### Problema 4

Considerare un gas di  $N$  particelle le cui mutue interazioni sono trascurabili, contenute in una regione  $a < r < b$  e in equilibrio termico a una temperatura  $T$ . Considerare le tre distribuzioni di probabilità

1.  $dP = C_1 e^{-\beta \epsilon \frac{r}{a}}$  ,

2.  $dP = C_2 \left[\frac{r}{a}\right]^{1-\beta \epsilon}$  ,

3.  $dP = C_3 r^2 e^{-\beta \epsilon \frac{a}{r}}$  ,

dove le  $C_i$  sono costanti di normalizzazione e  $\epsilon$  è una costante con le dimensioni di energia. Studiare la dipendenza da  $\beta$  del valore medio  $\langle r \rangle$  nei tre casi, confrontandolo con  $a$  e  $b$ , dove  $b \gg a$ , e interpretare i risultati. Potete pensare a un contesto, in Fisica, in cui questo tipo di considerazioni possono avere una certa rilevanza?

#### Problema 5

L'analisi complessa ha un ruolo importante in Fisica.

1. La soluzione generale dell'equazione delle onde in una dimensione può essere ottenuta sovrapponendo funzioni di  $ct + x$  e funzioni di  $ct - x$  (dette a volte "onde sinistre e destre"). Usare questo risultato per identificare il corrispondente legame tra funzioni (anti)analitiche e l'equazione di Laplace in due dimensioni.

2. In tre dimensioni esiste una interessante proposta avanzata in passato dal matematico E. Whittaker: piuttosto che funzioni olomorfe e anti-olomorfe, esiste una famiglia continua di funzioni "3d-holomorfe".

a. Mostrare che

$$f(iz + x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) , \tag{3}$$

dove  $\phi$  è un parametro libero, risolve l'equazione di Laplace in tre dimensioni nelle coordinate Cartesiane  $(x, y, z)$ .

b. Mostrare che per  $z > 0$  la funzione di Green a tre dimensioni si può esprimere come

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{iz + x \cos \phi + y \sin \phi}. \quad (4)$$

c. Mostrare che il risultato è però opposto per  $z < 0$ .

Admission to Materials and Nanotechnologies, General Chemistry written exam

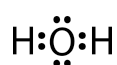
**Exercise 1**

For each of the following compounds:

a.  $\text{Ni}(\text{CO})_4$  b.  $\text{C}_2\text{H}_6$  c.  $\text{ClF}_3$  d.  $\text{SF}_6$  e.  $\text{IF}_7$  f.  $\text{BrF}_3$  g.  $\text{Pt}(\text{Cl}_6)^{2-}$  h.  $\text{CO}_2$

1. Define the molecular structure (Lewis structure).

*Example:* for a water molecule, the Lewis structure is the following:



2. Determine the molecular geometry according to VSEPR theory and the symmetry point group.

*Example:* for a water molecule, the VSEPR geometry is “angular shape derived from a tetrahedral shape”. The symmetry point group is the  $\text{C}_{2v}$  one.

3. Report the formal charge and the oxidation number of each atom.

4. State if they have a non-zero electric dipole moment.

5. State whether they are chiral.

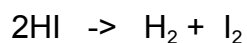
**Exercise 2**

Balance the following redox reactions occurring in aqueous solution (eventually, include species  $\text{H}^+$ ,  $\text{OH}^-$  and  $\text{H}_2\text{O}$ , if needed):

- $\text{AsO}_4^{3-} + \text{Sn}^{2+} \rightarrow \text{AsO}_3^{3-} + \text{Sn}^{4+}$
- $\text{I}_2 + \text{NO}_3^- \rightarrow \text{IO}_3^- + \text{NO}_2$
- $\text{Zn} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{Zn}(\text{NO})_3 + \text{NH}_4\text{NO}_3$

### Exercise 3

Compute the Gibbs free energy change of the following reaction at 400 K temperature, where all chemical species are in the gas phase, and at the pressure of  $H_2 = I_2 = 0.333$  atm and  $HI = 1.0$  atm ( $\Delta H_f^\circ(I_2, \text{gas}) = 65.5$  kJ/mol):



### Exercise 4

Evaluate the pH of 20.0 mL aqueous solution containing both hydrochloric acid at a concentration of 0.02 M and 0.05M of a weak acid, considering its acid dissociation constant to be  $K_a = 1.54 \times 10^{-2}$ .

### Exercise 5

*Dissertation:* Discuss the concept of molecular chirality, providing some illustrative examples, and its consequences in terms of chemical properties.

(1)

Let the layer  $0 < z < a$  be occupied by the constant and uniform charge density  $\rho > 0$ , while the layer  $-a < z < 0$  by the constant and uniform charge density  $-\rho < 0$ . A particle of mass  $m$  and charge  $q > 0$  approaches the plane  $z = 0$  with an initial velocity  $\vec{v}_o = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) v_o$ , with  $v_o > 0$ , coming from a distance from the plane that is large compared to  $a$ .

Determine whether the particle can pass through both charged layers or not, and determine its final velocity  $\vec{v}_f$  once it has again moved away from them to a distance large compared to  $a$ . Is it possible that the particle can no longer move away from the plane  $z = 0$  to a distance greater than  $a$ ?

(2)

Describe Millikan's oil drop experiment to measure the electric charge of the electron. Show schematically the apparatus needed and describe the crucial aspects. Which are the equations that govern the experiment?

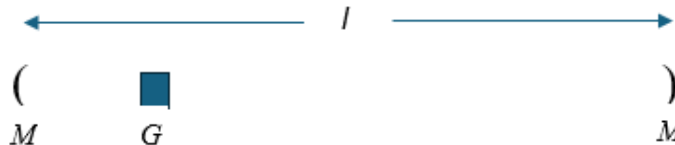
(3)

A particle of mass  $m$  and charge  $q$  moves on the  $xy$  plane connected to the origin by an ideal spring of negligible mass, with spring constant  $k$  and rest length  $r_o$ , and in the presence of a constant and uniform magnetic field  $\vec{B} = B_o \hat{z}$ .

Discuss the possible circular orbits, paying attention to the direction of rotation, and, in particular, the dependence of  $r(\omega)$  of their radius on the angular frequency. Is there a circular orbit of minimum radius?

(4)

A laser consists of two nearly perfectly reflecting mirrors,  $M$ , and gain medium  $G$  of bandwidth  $\Delta f$  centered at  $f$



- What are the allowed frequencies for laser operation in this optical cavity? Express your answer in terms of the time ( $\tau$ ) it takes light to make one round trip in the cavity
- Assume that the laser operates on all possible cavity modes within the gain bandwidth. Also, assume that these modes are all stable in phase, i.e. that there are no fluctuations on phase. Finally, assume that the phases are adjusted so that all modes are instantaneously in phase at  $t = 0$ . How will the laser output vary in time?
- If it is desired to produce a pulse of  $l$  ns duration at the wavelength of  $600$  nm, what bandwidth  $\Delta f$  is required? How many laser modes would this involve? (Let  $l = 1.5$  m)

(5)

The air temperature on the surface of an iced lake remains constantly equal to  $-5.2$  °C for 60 days. Develop a model to describe how fast the thickness of the ice increases starting from its initial value  $h_0 = 25$  cm. Knowing, in particular, that after 12 days the thickness is 37 cm and that after 21 days it is 44 cm, estimate the ice thickness  $h_f$  after 60 days.