

**SCUOLA NORMALE SUPERIORE**  
**CONCORSO DI AMMISSIONE AL PRIMO ANNO DEL CORSO ORDINARIO**  
**PROVA SCRITTA DI MATEMATICA PER MATEMATICA, INFORMATICA, FISICA**  
**25 Agosto 2025**

**Esercizio 1.** Siano  $p, n, a$  interi positivi e si supponga che  $p$  sia primo.

- (a) Mostrare che se  $p^a$  divide  $n!$  allora

$$a \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^n} \right\rfloor$$

(b) Mostrare che, se esiste un intero  $k$  con  $0 \leq k \leq n$  tale che  $p^a$  divide  $\binom{n}{k}$ , allora  $p^a \leq n$ .

*Nota.* Ricordiamo che  $0! = 1! = 1$ ,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  e per  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x \rfloor$  è il più grande intero  $h$  con  $h \leq x$ .

**Esercizio 2.** Siano  $f(t)$  e  $g(t)$  polinomi a coefficienti reali di grado 3 e sia  $h(t)$  un polinomio non nullo a coefficienti reali di grado al massimo 2. Supponiamo che si abbia

$$f(t)^2 + h(t)^2 = g(t)^2.$$

Mostrare che esistono due numeri reali  $a \neq b$  per i quali  $f(a) = f(b) = 0$ .

**Esercizio 3.** Consideriamo una lista di commissioni d'esame, ciascuna delle quali consiste di 6 membri. Due commissioni qualsiasi della lista possono avere o meno membri in comune, ma non possono coincidere. Ciascun possibile membro di commissione è *generoso* o *severo*, e una commissione è *bilanciata* se contiene almeno un membro generoso e almeno uno severo. Chi prepara la lista non ha idea se ciascun commissario sia generoso o severo.

- (a) Fissata una lista di 30 commissioni, assumiamo che ogni persona che vi compare sia generosa o severa con uguale probabilità, indipendentemente da ogni altra: cosa si può dire sul numero medio di commissioni bilanciate fra le 30, e cosa sulla probabilità che tutte le commissioni della lista risultino bilanciate?
- (b) Mostrare che, assumendo di avere a disposizione abbastanza membri, è possibile produrre una lista di 500 commissioni da 6 membri in modo da avere la certezza che vi sia almeno una commissione non bilanciata, a prescindere dalla generosità o severità dei singoli commissari.

**Esercizio 4.** Sono dati tre punti  $P_1, P_2, P_3$  distinti nel piano; dimostrare che le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a) i tre punti non sono allineati;
- (b) esistono  $r, R$  con  $0 < r < R$  e un punto  $C$ , tali che l'unione dei tre cerchi di raggio  $r$  e centri  $P_1, P_2, P_3$  contiene il cerchio di centro  $C$  di raggio  $R$ .<sup>1</sup>

**Esercizio 5.** Sia  $P(t) = at^2 + bt + c$  un polinomio a coefficienti interi con  $b^2 \neq 4ac$ . Mostrare che per ogni  $k$  esistono interi  $m_1, \dots, m_k$  tali che, per ogni  $i, j$  con  $1 \leq i < j \leq k$ ,  $P(m_i)P(m_j)$  non sia il quadrato di un numero intero.

**Esercizio 6.** (a) Si considerino, per cominciare, due cerchi nel piano, di raggi  $r_1, r_2 > 0$ .<sup>1</sup> Assumendo che  $r_1, r_2$  siano fissati e che la distanza  $d$  tra i centri sia nell'intervallo

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$

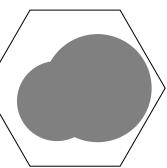
si mostri che, al crescere di  $d$ , l'area dell'unione dei due cerchi cresce. Cosa succede quando  $d > r_1 + r_2$  oppure quando  $d < |r_1 - r_2|$ ?

- (b) Sia ora fissato un esagono regolare di lato 1 nel piano. Tra tutte le coppie di cerchi<sup>2</sup> entrambi contenuti nell'esagono (eventualmente tangenti a uno o più lati, ed eventualmente sovrapposti), se ne consideri una tale che l'area dell'unione dei due cerchi sia massima. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (b.i) i centri dei cerchi si trovano su una diagonale dell'esagono passante per il centro dell'esagono;  
 (b.ii) i cerchi si sovrappongono (cioè l'intersezione ha area positiva);  
 (b.iii) i due cerchi non hanno lo stesso raggio.

<sup>1</sup>Ricordiamo quanto segue. Per "cerchio" si intende l'insieme descritto da  $\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$  nel piano cartesiano, dove  $(x_0, y_0)$  è il centro e  $r > 0$  è il raggio — geometricamente parlando, la "circonferenza" è il bordo del cerchio, e fa parte del cerchio.

<sup>2</sup>In questa seconda parte dell'esercizio i raggi non sono fissati.



**SCUOLA NORMALE SUPERIORE**  
**CONCORSO DI AMMISSIONE AL PRIMO ANNO DEL CORSO ORDINARIO**  
**PROVA SCRITTA DI MATEMATICA PER MATEMATICA, INFORMATICA, FISICA**  
 English Version  
 25 Agosto 2025

**Exercise 1.** Let  $p, n, a$  be positive integers, and assume that  $p$  is a prime number.

- (a) Show that if  $p^a$  divides  $n!$  then

$$a \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^n} \right\rfloor$$

- (b) Show that, if there exists an integer  $k$  with  $0 \leq k \leq n$  such that  $p^a$  divides  $\binom{n}{k}$ , then  $p^a \leq n$ .

*Remark.* We recall that  $0! = 1! = 1$ ,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , and that for  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x \rfloor$  is the largest integer  $h$  with  $h \leq x$ .

**Exercise 2.** Let  $f(t)$  and  $g(t)$  be polynomials with real coefficients of degree 3 and let  $h(t)$  be a nonzero polynomial with real coefficients of degree at most 2. Assume that

$$f(t)^2 + h(t)^2 = g(t)^2.$$

Show that there exist two real numbers  $a \neq b$  such that  $f(a) = f(b) = 0$ .

**Exercise 3.** We consider a list of examination boards, each of which consists of 6 members. Any two boards on the list might have some members in common, but they cannot be the same. Each possible board member is either *generous* or *strict*, and an examination board is said to be *balanced* if it includes both a generous and a strict member. Whether each board member is generous or strict is not known when the list is made.

- (a) A list of 30 examination boards is fixed; assume that each person appearing on it is generous or strict with equal probability, independently of all others. What can one say about the average number of balanced boards among the 30, and about the probability that all boards on the list happen to be balanced?
- (b) Show that, assuming enough members are available, it is possible to write up a list of 500 examination boards (each having 6 members) so as to be certain that at least one board will not be balanced, regardless of whether each member is generous or strict.

**Exercise 4.** Let  $P_1, P_2, P_3$  be three distinct points in the plane. Show that the following statements are equivalent:

- (a) the three points are not collinear;
- (b) there exist  $r, R$  with  $0 < r < R$  and a point  $C$ , such that the union of the three disks with radius  $r$  and centers  $P_1, P_2, P_3$  contains the disk of center  $C$  and radius  $R$ .<sup>1</sup>

**Exercise 5.** Let  $P(t) = at^2 + bt + c$  be a polynomial with integer coefficients, such that  $b^2 \neq 4ac$ . Show that for any  $k$  there exist integer numbers  $m_1, \dots, m_k$  such that, for all  $i, j$  with  $1 \leq i < j \leq k$ ,  $P(m_i)P(m_j)$  isn't the square of an integer.

**Exercise 6.** (a) We start by considering two disks in the plane, with radii  $r_1, r_2 > 0$ .<sup>1</sup> Having fixed  $r_1, r_2$  and assuming that the distance  $d$  between their centers is a real number in the range

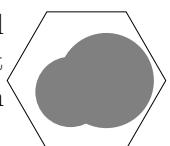
$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 ,$$

prove that when  $d$  increases, the total area of the union of the two disks increases as well. What happens when  $d > r_1 + r_2$  or  $d < |r_1 - r_2|$ ?

- (b) We now fix a regular hexagon in the plane, with each side of length 1. Among all pairs of disks<sup>2</sup> drawn within the hexagon (possibly overlapping, and possibly tangent to one or more sides of the hexagon), consider a pair such that the area of their union is maximal. Prove the following statements:
- (b.i) the disks' centers lie on a diagonal of the hexagon that intercepts the center of the hexagon;
  - (b.ii) the two disks overlap (that is, the area of their intersection is positive);
  - (b.iii) the two disks do not have the same radius.

<sup>1</sup>By "disk" we mean the set  $\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$  in the Cartesian plane, where  $(x_0, y_0)$  is the center and  $r > 0$  is the radius.

<sup>2</sup>In this second part the radii are not fixed.



**Istruzioni e informazioni utili per risolvere i problemi proposti.**

I calcoli numerici richiesti negli esercizi devono essere svolti a mano, senza l'ausilio della calcolatrice, usando i valori approssimati delle costanti fisiche e numeriche riportate qui di seguito, documentandone sinteticamente i passaggi.

costante	simbolo	valore	unità
Massa protone	$m_p$	$1.67 \times 10^{-27}$	kg
Carica elementare	$e$	$1.60 \times 10^{-19}$	C
Costante dielettrica vuoto	$1/4\pi\varepsilon_0$	$8.99 \times 10^9$	N m <sup>2</sup> C <sup>-2</sup>
Costante di Boltzmann	$k_B$	$1.38 \times 10^{-23}$	J K <sup>-1</sup>
Densità acqua	$\rho_a$	1	g cm <sup>-3</sup>
Accelerazione di gravità	$g$	9.81	m s <sup>-2</sup>

Altri valori numerici utili alla risoluzione degli esercizi sono:  $\sqrt{2} = 1.41$ ,  $\sqrt{3} = 1.73$ ,  $\sqrt{5} = 2.24$ ,  $\log(2) = 0.69$ ,  $\log(3) = 1.1$ ,  $\log(10) = 2.3$ . Si ricorda anche che  $\pi = 3.14$  and  $e = 2.72$ . Nello svolgere calcoli numerici, può essere utile usare la relazione  $1/(1-x) \approx 1+x$  valida per  $|x| \ll 1$ .

**Esercizio 1.** Un astronomo osserva un grande asteroide in avvicinamento al Sole e, misurandone il moto, determina che si tratta di un oggetto proveniente da grande distanza, in moto su un'orbita parabolica. L'asteroide si avvicina al Sole fino alla distanza minima di 1.1 UA, prima di iniziare a allontanarsi. Sarebbe destinato ad proseguire indefinitamente, senza essere più osservato, se non fosse che accidentalmente va a collidere con un piccolo pianeta che si muove intorno al Sole su un'orbita pressoché circolare di raggio 4.3 UA in un piano perpendicolare a quello dell'orbita dell'asteroide. L'asteroide colpisce la superficie del pianeta fondendosi con esso a formare un unico corpo celeste. L'astronomo, osservato questo evento catastrofico, misura accuratamente l'orbita del nuovo corpo, e determina che essa giace in un piano inclinato di 4.7 gradi rispetto al piano dell'orbita originaria del pianeta. Da queste informazioni l'astronomo calcola il rapporto tra la massa dell'asteroide e quella del pianeta. Quanto vale questo rapporto?

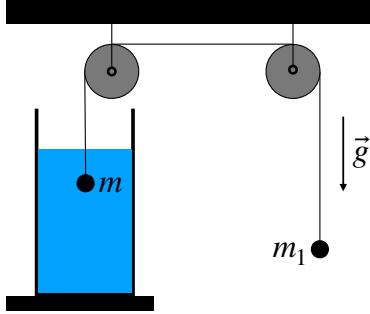
**Esercizio 2.** Lo sputtering è un processo fisico in cui gli atomi vengono espulsi dalla superficie di un materiale solido quando viene bombardato da particelle energetiche, tipicamente ioni provenienti da un plasma. Un grano sferico di polvere di silicato (densità  $\rho = 3.5 \text{ g cm}^{-3}$ ) con raggio  $a = 0.1 \mu\text{m}$  è esposto a un plasma caldo di protoni ( $T = 10^6 \text{ K}$ , densità  $n = 1 \text{ cm}^{-3}$ ) con resa da sputtering  $Y = 0.1$  (atomi rimossi per ione incidente).

- (i) Calcolare la scala temporale  $\tau_{\text{sput}}$  affinché il grano perda il 90% della sua massa.
- (ii) Si supponga ora che il grano di polvere acquisisca una carica negativa  $Z = -5e$  a causa di un qualche processo. Assumendo  $Y$  costante, come cambia la scala temporale  $\tau_{\text{sput}}$ ?

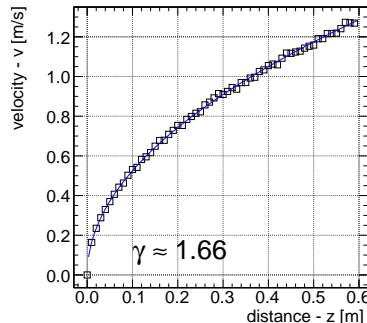
[Si ricorda che il peso molare atomico medio per il silicato  $\text{Mg}_2\text{SiO}_4$  vale circa 20 g/mol.]

(altri esercizi sul retro)

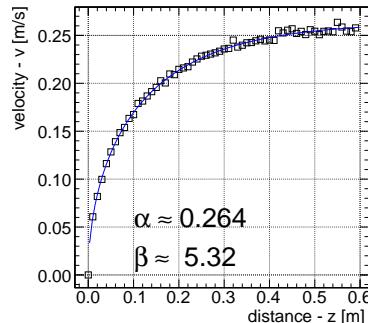
**Esercizio 3.** Un fisico sperimentale vuole studiare il moto di una piccola sfera di metallo di massa  $m$  e raggio  $r = 10 \text{ mm}$  in acqua sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità e a tal fine prepara un apparato sperimentale utilizzando una macchina di Atwood con due carrucole, come mostrato in figura (a), e con una seconda sfera di metallo di massa  $m_1$  appesa al lato opposto alla sfera  $m$ . I valori delle masse  $m$  e  $m_1$  sono ignoti. L'esperimento è reale, per cui le carrucole, i cavi e i perni non sono ideali, e sono presenti tutte le forze di attrito e di dissipazione di un sistema costruito in laboratorio. Il sistema è inizialmente fermo quando, a un certo istante, le due masse vengono lasciate libere e iniziano a muoversi sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ .



(a) Macchina di Atwood.



(b) Senza acqua.



(c) Con l'acqua.

lasciate libere e iniziano a muoversi sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ . Un sistema di acquisizione dati permette allo sperimentatore di misurare la velocità delle due masse,  $v$ , durante il moto, in funzione dello spostamento,  $z$ , dalla posizione iniziale. Vengono effettuate due serie di misure distinte. Nella prima serie di misure il contenitore di acqua è rimosso dall'esperimento, mentre nella seconda serie la sferetta  $m$  si muove all'interno del contenitore in presenza di acqua. I dati raccolti sono riportati rispettivamente nelle figure (b) e (c). Nel caso (b) lo sperimentatore trova che la funzione empirica che meglio descrive i dati è  $v = \gamma\sqrt{z}$ , e misura il valore della costante  $\gamma$  con delle tecniche di best fit. Nel caso (c) invece scopre che la funzione che meglio descrive i dati è  $v = \alpha\sqrt{1 - e^{-\beta z}}$ , e anche in questo caso riporta i valori di best fit per i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  direttamente sul grafico. Derivare dai risultati sperimentali una funzione empirica che descriva la forza di attrito,  $F_d$ , che l'acqua esercita sulla sfera  $m$ , in funzione della sua velocità  $v$ , e dare una stima dell'ordine di grandezza del valore numerico dei parametri di tale funzione usando i dati riportati nei grafici.

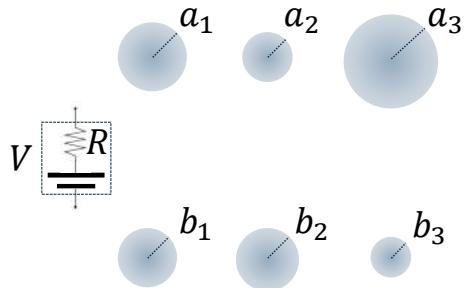
[Si ricorda che l'accelerazione di un punto materiale che si muove lungo una retta, per esempio identificata dal versore  $\hat{z}$ , si può scrivere come  $dv/dt = (dv/dz) \cdot v$ , dove  $v = dz/dt$  è la velocità del punto materiale, e  $z(t)$  è la coordinata che identifica la posizione del punto materiale.]

**Esercizio 4.** Si consideri un recipiente cilindrico di diametro  $D$ , pieno fino a un'altezza  $H$  di sabbia. Il recipiente ha un foro circolare al centro della base inferiore di diametro  $D_0$ , da cui fuoriesce, con un flusso continuo, la sabbia. Si vuole determinare se il flusso di sabbia  $W$  (massa per unità di tempo) in uscita dal foro dipenda dall'altezza  $H$ . Per rispondere alla domanda può essere utile considerare i valori riportati nella tabella:

	Flusso di sabbia $W$ (g/minuto)		
	Diametro del recipiente		
Diametro del foro $D_0$ (cm)	$D = 5 \text{ cm}$	$D = 10 \text{ cm}$	$D = 15 \text{ cm}$
0.5	216	221	225
0.75	608	600	593
1	1231	1240	1248
1.5	3371	3412	3420
2	7176	7199	7225

(altri esercizi sul secondo foglio)

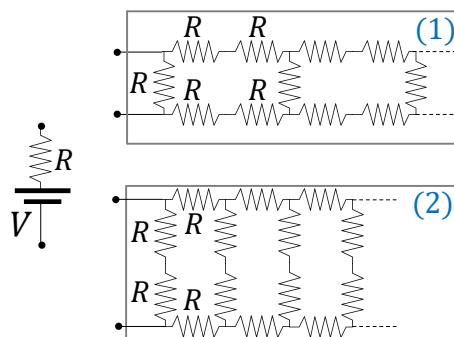
**Esercizio 5.** Si considerino tre coppie di sfere metalliche perfettamente conduttrici di raggi ( $a_i, b_i$ ), con  $i = 1, 2, 3$ , inizialmente neutre. La distanza tra i centri delle sfere di ciascuna coppia, così come la distanza tra sfere di coppie diverse, sono grandi rispetto ai raggi, in modo tale che effetti di mutua induzione possano essere trascurati. In un primo tempo, si procede a caricare elettricamente ciascuna coppia collegando istantaneamente le due sfere ai poli opposti di un generatore di tensione costante  $V$  e resistenza interna  $R$ , tramite cavi sottili di resistenza trascurabile; successivamente, i collegamenti vengono staccati e la stessa procedura viene ripetuta per le altre coppie.



- (i) Qual è la legge temporale secondo la quale ciascuna sfera di una coppia si carica? Come dipende l'energia totale fornita dal generatore dal valore di  $R$ ?
- (ii) Successivamente, dopo aver scaricato tutte le sfere, si ripete la procedura di carica, questa volta però collegando *simultaneamente* le tre sfere di raggio  $a_i$  al polo positivo e quelle di raggio  $b_i$  al polo negativo. Si dica se la carica elettrica su ciascuna sfera è cambiata rispetto al caso precedente, ricavando ad esempio l'espressione per la carica sulla sfera di raggio  $a_1$  nei due casi.
- (iii) Come scegliereste il valore dei raggi  $a_i$  e  $b_i$  affinché l'energia totale fornita dal generatore sia la stessa nei due casi?

[Si ricorda che il potenziale elettrico rispetto all'infinito di una sfera conduttrice di raggio  $a$  e carica  $Q$  è proporzionale al rapporto  $Q/a$ .]

**Esercizio 6.** Si considerino due carichi resistivi, ciascuno dei quali modellizzabile come una serie molto grande (idealmente infinita!) di resistenze tutte uguali di valore  $R = 50\Omega$ , come in figura. Ai capi di ciascun carico viene collegato un generatore di tensione costante  $V = 10\text{ V}$  e resistenza interna anche essa uguale a  $R$ . Si vogliono determinare le potenze  $P_1$  e  $P_2$  assorbite da ciascun carico quando questo è collegato individualmente al generatore. A tal scopo, si fa uso delle misure di tensione ai capi del carico e di corrente in ingresso, fatte rispettivamente con un voltmetro (ideale) avente incertezza di lettura  $1\text{ mV}$  e con un amperometro (ideale) avente incertezza di lettura  $3\text{ mA}$ . Si dica se la strumentazione a disposizione è sufficientemente precisa per poter mettere in luce una discrepanza significativa tra le due potenze.



**Instructions and useful information for solving the proposed problems.**

The numerical calculations required in the proposed problems must be performed by hand, without the aid of a calculator, using the approximate values of the physical and numerical constants reported below, briefly documenting the steps.

constant	symbol	value	unit
Proton mass	$m_p$	$1.67 \times 10^{-27}$	kg
Elementary charge	$e$	$1.60 \times 10^{-19}$	C
Vacuum permittivity	$1/4\pi\varepsilon_0$	$8.99 \times 10^9$	N m <sup>2</sup> C <sup>-2</sup>
Boltzmann constant	$k_B$	$1.38 \times 10^{-23}$	J K <sup>-1</sup>
Water density	$\rho_a$	1	g cm <sup>-3</sup>
Gravity acceleration	g	9.81	m s <sup>-2</sup>

Other numerical values useful for solving the problems are:  $\sqrt{2} = 1.41$ ,  $\sqrt{3} = 1.73$ ,  $\sqrt{5} = 2.24$ ,  $\log(2) = 0.69$ ,  $\log(3) = 1.1$ ,  $\log(10) = 2.3$ . Recall also that  $\pi = 3.14$  e  $e = 2.72$ . When performing numerical calculations, it can be useful to use the relation  $1/(1 - x) \approx 1 + x$ , valid for  $|x| \ll 1$ .

**Problem 1.** An astronomer spots a large asteroid approaching the Sun, and by measuring its motion, realizes that it is an object coming from very far away that moves on a parabolic orbit. The asteroid approaches the Sun to a minimum distance of 1.1 AU, then begins to move away. It would be destined to move away indefinitely, never to be seen again, if it weren't for an accidental collision with a small planet moving around the Sun on a nearly circular orbit of radius 4.3 AU in a plane perpendicular to that of the asteroid's orbit. The asteroid impacts the planet's surface, merging with it to form a single new object. The astronomer, having observed this catastrophic event, accurately measures the orbit of the new body, and finds that it lies in a plane inclined by 4.7 degrees with respect to the plane of the planet's original orbit. From this information, the astronomer calculates the ratio of the asteroid's mass to the planet's mass. What is this ratio?

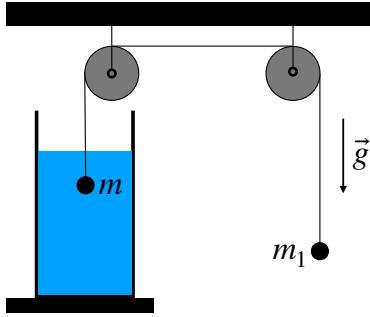
**Problem 2.** Sputtering is a physical process where atoms are ejected from the surface of a solid material when it is bombarded by energetic particles, typically ions from a plasma. A spherical silicate (density  $\rho = 3.5 \text{ g cm}^{-3}$ ) dust grain of radius  $a = 0.1 \mu\text{m}$  is exposed to a hot plasma ( $T = 10^6 \text{ K}$ , density  $n = 1 \text{ cm}^{-3}$ ) with sputtering yield  $Y = 0.1$  (atoms removed per incident ion).

1. Calculate the sputtering timescale  $\tau_{\text{sput}}$  for the grain to lose 90% of its mass.
2. Next suppose that the dust grain acquires a negative charge  $Z = -5e$  due to some process. Assuming  $Y$  to be constant, how does the sputtering timescale change?

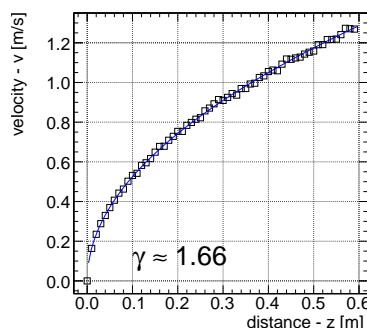
[Recall that the average atomic molar weight for the silicate  $\text{Mg}_2\text{SiO}_4$  is approximately 20 g/mol.]

(more problems on the back)

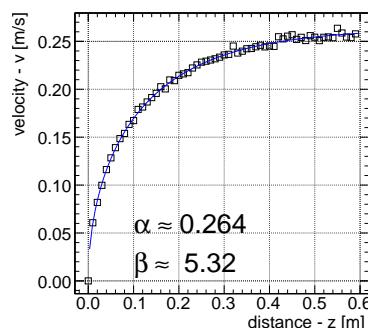
**Problem 3.** An experimental physicist wants to study the motion of a small metal sphere of mass  $m$  and radius  $r = 10 \text{ mm}$  in water under the effect of gravitational acceleration. To this end, they prepare an experimental setup using an Atwood machine with two pulleys, as shown in figure (a), and with a second metal sphere of mass  $m_1$  suspended on the opposite side to sphere  $m$ . The values of masses  $m$  and  $m_1$  are unknown. The experiment is real, so the pulleys, cables, and pivots are not ideal, and all friction and dissipation forces of a laboratory-built system are present. The system is initially at rest. At a certain instant, the two masses are released and



(a) Atwood machine.



(b) No water.



(c) With water.

begin to move under the effect of gravitational acceleration  $\vec{g}$ . A data acquisition system allows the experimenter to measure the velocity of the two masses,  $v$ , during the motion, as a function of the displacement,  $z$ , from the initial position. Two distinct sets of measurements are performed. In the first set of measurements, the water container is removed from the experiment, while in the second set the sphere  $m$  moves inside the container in the presence of water. The collected data are reported respectively in figures (b) and (c). In case (b), the experimenter finds that the empirical function that best describes the data is  $v = \gamma\sqrt{z}$ , and measures the value of the constant  $\gamma$  with best fit techniques. In case (c), however, they discover that the function that best describes the data is  $v = \alpha\sqrt{1 - e^{-\beta z}}$ , and in this case also report the best fit values for the parameters  $\alpha$  and  $\beta$  directly on the graph. Derive from the experimental results an empirical function that describes the drag force,  $F_d$ , that the water exerts on the sphere  $m$ , as a function of its velocity  $v$ , and provide an estimate of the order of magnitude of the numerical value of the parameters of that function using the data reported in the graphs.

[Recall that the acceleration of a material point moving along a straight line, for example identified by the unit vector  $\hat{z}$ , can be written as  $dv/dt = (dv/dz) \cdot v$ , where  $v = dz/dt$  is the velocity of the material point, and  $z(t)$  is the coordinate that identifies the position of the material point.]

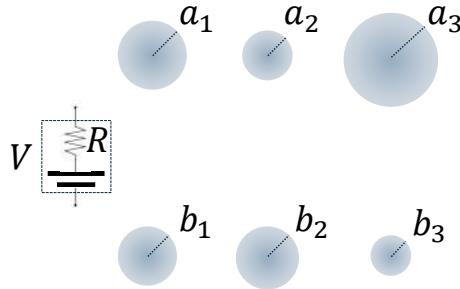
**Problem 4.** Consider a cylindrical container with diameter  $D$ , filled with sand up to a height  $H$ . The container has a circular hole at the center of its lower base with diameter  $D_0$ , through which the sand flows out continuously. The goal is to determine whether the sand flow rate  $W$  (mass per unit time) exiting the hole depends on the height  $H$ .

To address this question, it may be useful to consider the values reported in the following table:

		Sand flow rate $W$ (g/min)		
		Sand container diameter		
Hole diameter $D_0$ (cm)		$D = 5 \text{ cm}$	$D = 10 \text{ cm}$	$D = 15 \text{ cm}$
0.5		216	221	225
0.75		608	600	593
1		1231	1240	1248
1.5		3371	3412	3420
2		7176	7199	7225

(more problems on the second sheet)

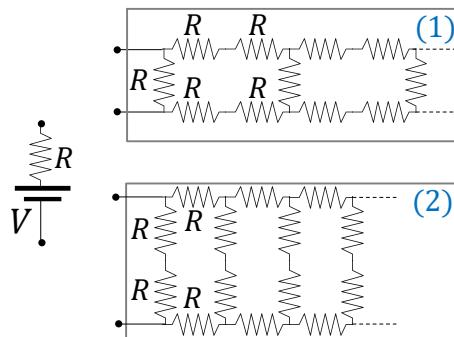
**Problem 5.** Let us consider three pairs of perfectly conducting metallic spheres of radii  $(a_i, b_i)$ , with  $i = 1, 2, 3$ , all neutral at time zero. The distance between the centers of the spheres of each pair, as well as the distance between spheres of different pairs, is large compared to their radii, so that mutual electric inductance effects can be neglected. At first, each pair is charged by instantaneously connecting the two spheres to the opposite poles of a constant DC generator with internal resistance  $R$ . This is done by means of thin wires of negligible resistance that do not perturb the system. The electric connections are then removed, and an identical procedure is applied to the remaining pairs.



1. What is the law of time evolution for the electric charge on each sphere? How does the total energy delivered by the generator depend on  $R$ ?
2. Subsequently, after all spheres have been discharged, the procedure is repeated, but this time all spheres of radius  $a_i$  ( $b_i$ ) are *simultaneously* connected to the positive (negative) pole. Has the total charge on each sphere changed compared to the previous case? Determine, for example, the electric charge on the sphere of radius  $a_1$  for the two cases.
3. How would you choose the radii  $a_i$  and  $b_i$  such that the total energy delivered by the generator for the charging process is the same in the two cases?

[Recall that the electrostatic potential of a conducting sphere of radius  $a$  and charge  $Q$  is proportional to the ratio  $Q/a$ .]

**Problem 6.** Two distinct resistive loads can be modeled as two series made up of a large number (ideally infinite!) of identical resistors of resistance  $R = 50 \Omega$ , as depicted in the figure. A DC generator with internal resistance  $R$  provides a constant voltage drop  $V$  across the electrodes of each load. We want to determine the powers  $P_1$  and  $P_2$  absorbed by the two loads when connected one at the time to the generator. To this purpose, the voltage drop and current flowing into each load are measured using an (ideal) voltage with resolution 1 mV and an (ideal) amperometer with current resolution 3 mA. Is the available instrumentation sufficiently accurate to conclude that  $P_1$  and  $P_2$  are significantly different?



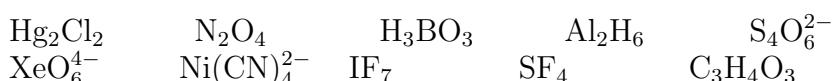
# Ammisione al I anno - Corso Ordinario, Chimica e Geologia. AA 2025/2026

Prova Scritta di Chimica

27/08/2025

## Esercizio 1

Date le seguenti formule minime:

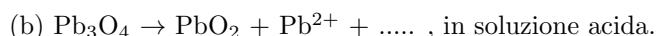
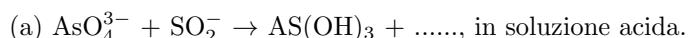


Disegnare per ogni caso la formula di struttura di Lewis e determinarne la geometria spaziale. In caso possano esistere forme isomeriche, disegnarle esplicitamente. Inoltre indicare:

- L'ibridazione degli atomi.
- Se la struttura è chirale e se esistono elementi di simmetria.
- Se la molecola è polare. In tal caso, tracciare la direzione del momento di dipolo.

## Esercizio 2

Si bilancino le seguenti reazioni redox completando con eventuali specie mancanti (reagenti e/o prodotti):



## Esercizio 3

25 mL di una soluzione acquosa 0,100 M di acido ossalico ( $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ ) vengono titolati con una soluzione 0,100 M di idrossido di sodio ( $\text{NaOH}$ ). Le costanti di dissociazione dell'acido ossalico sono:

$$K_{a1} = 5,4 \times 10^{-2} \quad K_{a2} = 5,4 \times 10^{-5}$$

- Scrivere le due dissociazioni successive dell'acido ossalico in acqua.
- Scrivere le equazioni bilanciate delle reazioni tra  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$  e  $\text{NaOH}$ .
- Calcolare il volume di  $\text{NaOH}$  necessario per raggiungere:
  - il primo punto equivalente (neutralizzazione del primo protone),
  - il secondo punto equivalente (neutralizzazione di entrambi i protoni).
- Calcolare il pH della soluzione:
  - iniziale (solo acido debole in soluzione),

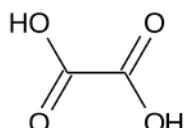


Figure 1: Acido ossalico

- a metà del primo punto equivalente,
  - al primo punto equivalente,
  - a metà del secondo punto equivalente,
  - al secondo punto equivalente,
  - dopo l'aggiunta di 5,0 mL di NaOH oltre il secondo punto equivalente.
- e. Costruire la curva di titolazione pH vs volume di NaOH aggiunto, considerando aggiunte crescenti da 0 a 60 mL (incrementi di 5 mL)
- f. Proporre le caratteristiche secondo le quali scegliere un indicatore per i due punti equivalenti.

Commentare i risultati ottenuti ai vari punti.

#### **Esercizio 4**

Il grado di dissociazione ( $\alpha$ ) di un acido indica il rapporto tra il numero di moli di acido dissociato e il numero di moli totali di acido nella soluzione.

Dato un generico acido debole HA:

- a. calcolare  $\alpha$  al tendere della concentrazione di HA a 0 nel caso in cui  $pK_a = 5$ ;
- b. calcolare  $\alpha$  al tendere della concentrazione di HA a 0 nel caso in cui  $pK_a = 9$ ;
- c. graficare qualitativamente l'andamento di  $\alpha$  rispetto alla concentrazione ed al  $pK_a$ . Commentare i risultati ottenuti.

#### **Esercizio 5**

Calcola la pressione osmotica a 25°C di una soluzione contenente 0,5 g di un elettrolita in 1 litro di soluzione, sapendo che se 0,125 g dello stesso elettrolita sono disiolti in 15 ml di acqua, il punto di congelamento della soluzione ottenuta è -0,2°C. La costante crioscopia dell'acqua vale 1,86 gradi kg mol<sup>-1</sup>.

#### **Esercizio 6**

*Dissertazione:* Le soluzioni tampone (max due pagine).

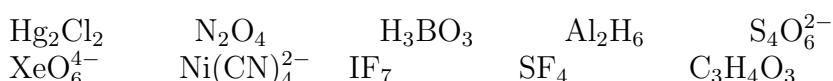
# Ammisione al I anno - Corso Ordinario, Chimica e Geologia. AA 2025/2026

Prova Scritta di Chimica - English version

27/08/2025

## Exercise 1

Given the following empirical formulas:



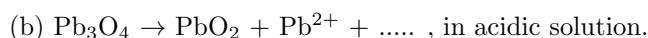
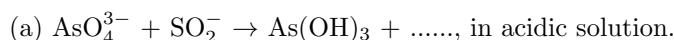
Draw the Lewis structural formula for each compound and determine its molecular geometry. If isomeric forms are possible, draw them explicitly.

Also indicate:

- The hybridization of the atoms.
- Whether the structure is chiral and if symmetry elements are present.
- Whether the molecule is polar. If so, graphically indicate the direction of the dipole moment.

## Exercise 2

Balance the following redox reactions by completing with any missing species (reactants and/or products):



## Exercise 3

25 mL of a 0.100 M aqueous solution of oxalic acid ( $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ ) is titrated with a 0.100 M solution of sodium hydroxide ( $\text{NaOH}$ ). The dissociation constants of oxalic acid are:

$$K_{a1} = 5.4 \times 10^{-2} \quad K_{a2} = 5.4 \times 10^{-5}$$

- Write the two successive dissociation reactions of oxalic acid in water.
- Write the balanced equations for the reactions between  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$  and  $\text{NaOH}$ .
- Calculate the volume of  $\text{NaOH}$  needed to reach:
  - the first equivalence point (neutralization of the first proton),
  - the second equivalence point (neutralization of both protons).
- Calculate the pH of the solution:

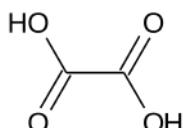


Figure 1: Oxalic acid

- initially (only weak acid in solution),
  - at the midpoint of the first equivalence point,
  - at the first equivalence point,
  - at the midpoint of the second equivalence point,
  - at the second equivalence point,
  - after adding 5.0 mL of NaOH beyond the second equivalence point.
- e. Build the titration curve (pH vs. volume of NaOH added), considering additions from 0 to 60 mL (increments of 5 mL).
- f. Propose criteria for choosing a suitable indicator for the two equivalence points.

Comment on the results obtained in the various points.

#### Exercise 4

The degree of dissociation ( $\alpha$ ) of an acid indicates the ratio between the number of moles of dissociated acid and the total number of moles of acid in solution.

Given a generic weak acid HA:

- Calculate  $\alpha$  in the limit of HA concentration tending to 0 when  $pK_a = 5$ ;
- Calculate  $\alpha$  in the limit of HA concentration tending to 0 when  $pK_a = 9$ ;
- Draw qualitative plots of  $\alpha$  versus the concentration and  $pK_a$ . Comment on the results obtained.

#### Exercise 5

Calculate the osmotic pressure at 25°C of a solution containing 0.5 g of an electrolyte in 1 liter of solution, knowing that if 0.125 g of the same electrolyte are dissolved in 15 mL of water, the freezing point of the resulting solution is -0.2°C. The cryoscopic constant of water is  $1.86 \text{ } ^\circ\text{C}\cdot\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

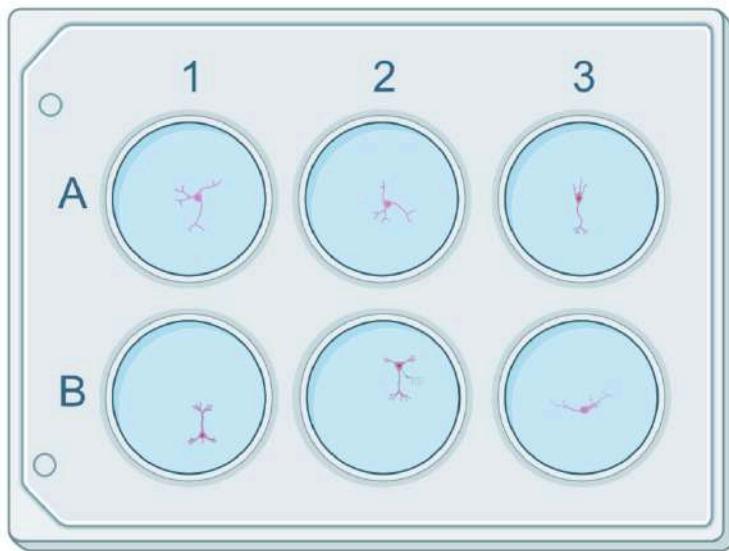
#### Exercise 6

*Short essay:* Buffer solutions (maximum two pages).

## AMMISSIONE AL I ANNO DI SCIENZE BIOLOGICHE

### Problema 1

Un gruppo di ricercatori ha messo a punto un metodo per coltivare neuroni in piccolissime capsule Petri che consentono di mantenere in coltura un singolo neurone per piastra.



La registrazione di questi neuroni mostra come essi emettano spontaneamente potenziali d'azione pur non ricevendo sinapsi da altri neuroni.

Il candidato fornisca una possibile spiegazione per le seguenti osservazioni:

1. La frequenza dei potenziali d'azione aumenta in maniera acuta se si aumenta la concentrazione di  $K^+$  nel mezzo di coltura
2. I potenziali d'azione spariscono se si elimina completamente il  $Ca^{++}$  dal mezzo di coltura
3. I potenziali d'azione spariscono dopo incubazione con bungarotossina, un veleno che lega i recettori dell'acetilcolina
4. I potenziali d'azione spariscono dopo incubazione per periodi prolungati con mezzo ad alta concentrazione di  $K^+$  (aiuto: ragiona sul fatto che in queste condizioni i neuroni emettono potenziali d'azione ad alta frequenza per un periodo prolungato)

### Problema 2

Un gruppo di ricercatori è interessato a comprendere i meccanismi in base ai quali viene regolata la sintesi delle proteine. A loro disposizione ci sono tre diverse

tecniche: RNAseq, RIBOseq e MS. Il candidato non è tenuto a conoscere il funzionamento di queste tecnologie ma ragioni semplicemente sui dati che da esse vengono prodotti:

- RNAseq: consente di quantificare la concentrazione di tutti gli RNA all'interno di un campione
- RIBOseq: simile alla precedente, ma l'analisi è preceduta da una purificazione dei ribosomi. In pratica, il campione viene trattato in modo da separare i ribosomi dal resto del citoplasma (di nuovo, il candidato non è tenuto a conoscere questo metodo). In questo modo, gli RNA ai quali i ribosomi sono legati possono essere quantificati in maniera specifica.
- MS: consente di quantificare la concentrazione delle proteine all'interno di un campione.

Gli esperimenti vengono effettuati in cellule in coltura prima e dopo trattamento con una data sostanza (i dettagli non sono rilevanti per la soluzione del problema).

1. Quale ordine di grandezza ci aspettiamo per gli RNA di un gene per i quali RNAseq misura una concentrazione  $> 0$  in una cellula eucariotica?
2. Alcuni RNA hanno una espressione quantificabile con RNAseq, ma RIBOseq misura una concentrazione  $= 0$ . Escludendo ogni possibile errore tecnico, come puoi spiegare questo fenomeno?
3. I ricercatori si concentrano sulle proteine la cui concentrazione aumenta dopo il trattamento e studiando i cambi di concentrazione dei relativi mRNA scoprono che queste possono essere divise in tre categorie

Categoria	RNAseq	RIBOseq
A	aumenta	aumenta
B	invariato	aumenta
C	invariato	invariato

Il candidato proponga per ognuna di queste categorie di proteine un meccanismo che ne spieghi il comportamento (aumento o non variazione)

### **Problema 3**

Un ricercatore esegue l'estrazione di acidi nucleici totali da un campione di tessuto e procede con l'analisi della composizione in basi. Dopo l'analisi, il ricercatore osserva che:

- Il rapporto  $(A+T):(C+G)$  è significativamente diverso da 1.
- Il rapporto Adenina:Timina ( $A:T$ ) è significativamente diverso da 1:1.
- Il rapporto Citosina:Guanina ( $C:G$ ) è anch'esso significativamente diverso da 1:1 e diverso da  $(A:T)$ .

In base a queste osservazioni e alle tue conoscenze di biologia molecolare, rispondi ai seguenti quesiti, argomentando la tua risposta:

1. Costanza dei rapporti: esiste una regola generale per cui i rapporti  $A:T$  e  $C:G$  dovrebbero essere costanti fra specie diverse o all'interno dello stesso organismo? Se sì, quale regola è e perché dovrebbe valere?
2. Rapporti attesi: i rapporti osservati dal ricercatore ( $A:T \neq 1$  e  $C:G \neq 1$ , e  $A:T \neq C:G$ ) sono quelli che ti aspetteresti normalmente in un campione di acidi nucleici totali proveniente da un tessuto eucariotico sano? Spiega la tua risposta.
3. Spiegazione delle deviazioni: quali condizioni o fattori potrebbero spiegare i rapporti di basi osservati, ovvero la loro deviazione dai valori attesi e il fatto che i rapporti  $A:T$  e  $C:G$  siano diversi tra loro? Elenca e descrivi almeno due possibili scenari biologici che potrebbero portare a questi risultati.

### **Problema 4**

Un ricercatore sta studiando una coltura di cellule, tutte proliferanti, il cui ciclo cellulare non è sincronizzato. Per investigare la proliferazione di queste cellule, il ricercatore decide di aggiungere un analogo radioattivo della timidina (marcatore della sintesi del DNA) alla coltura e lo lascia agire per 0.5, 1, 2, 3 o 4 hr, osservando rispettivamente 12.5, 15, 20, 25, 30% di cellule marcate. Inoltre osserva che il picco di cellule in mitosi di cellule radioattive è 6 ore dopo l'aggiunta di timidina radioattiva.

Basandoti su queste informazioni e sulle tue conoscenze del ciclo cellulare, rispondi ai seguenti quesiti, argomentando la tua risposta:

1. Percentuale di cellule in divisione (intesa come cellule che passano dalla fase S di sintesi del DNA): Quale percentuale della popolazione cellulare si sta attivamente dividendo in un dato momento? Giustifica la tua risposta.

2. Deduzioni sulle fasi del ciclo cellulare: considerando i dati forniti, puoi dedurre qualcosa riguardo alla durata o alla proporzione delle diverse fasi del ciclo cellulare (G1, S, G2, M) in questa popolazione? Spiega quali fasi sono interessate dall'incorporazione dell'analogo e cosa implica la percentuale di cellule marcate.

3. Lunghezza del ciclo cellulare Individuale: è possibile determinare la lunghezza media di un singolo ciclo cellulare (cioè, il tempo necessario a una singola cellula per completare un ciclo) basandosi solo su questi dati? Se sì, quale sarebbe? Se no, perché no e quali ulteriori informazioni sarebbero necessarie?

### Problema 5

1. Mendel fu il primo a formulare una teoria genetica basata sui numeri precisi e porre le basi per tutti gli studi successivi. Di seguito sono riportati i numeri originali dell'incrocio prodotto dalle linee pure per produrre le prime generazioni di figli.

P1	P2	F2	
Liscio + giallo	Rugoso + giallo	Liscio+giallo 5474	Rugoso + giallo 1850
Liscio + giallo	Liscio + verde	Liscio + giallo 6002	Liscio + verde 2001
Fiore viola	Fiore bianco	Fiore viola 705	Fiore bianco 224
Baccello verde	Baccello giallo	Baccello verde 428	Baccello giallo 152

Cosa puoi affermare da queste osservazioni? Noti qualche discrepanza dal modello teorico alla base di queste osservazioni? Come si potrebbero giustificare?

2. Un ceppo di topi di laboratorio mostra una malattia genetica e il fenotipo è dipendente dal sesso. Le femmine possono avere una manifestazione grave G o lieve L. I maschi, invece, hanno solo una manifestazione lieve. L.

Il ceppo è stabile, ovvero incrociando ♀ di fenotipo G con ♂ di fenotipo L si ottiene una prole composta:

♀ 100% di fenotipo G

$\text{♂}$  100% di fenotipo L

Incrociando  $\text{♀}$  di fenotipo L con  $\text{♂}$  di fenotipo L si ottiene una prole così composta:

$\text{♀}$  50% di fenotipo G e 50% di fenotipo L

$\text{♂}$  50% di fenotipo L e 50% non affetti

Incrociando  $\text{♀}$  di fenotipo G con  $\text{♂}$  di un ceppo diverso, non affetto, si ottiene una prole così composta:

$\text{♀}$  100% di fenotipo L

$\text{♂}$  100% di fenotipo L

Incrociando  $\text{♀}$  di un ceppo diverso, non affetto, con  $\text{♂}$  di fenotipo L, si ottiene una prole così composta:

$\text{♀}$  100% di fenotipo L

$\text{♂}$  100% non affetti

Proporre una possibile base ereditaria per questa patologia

## Problema 6

In alcune specie di api, come *Apis mellifera*, gli individui possono assumere ruoli biologici molto diversi: le regine vivono anche più di 5 anni e sono fertili, mentre le api operaie, geneticamente identiche, vivono solo alcune settimane o mesi e sono sterili.

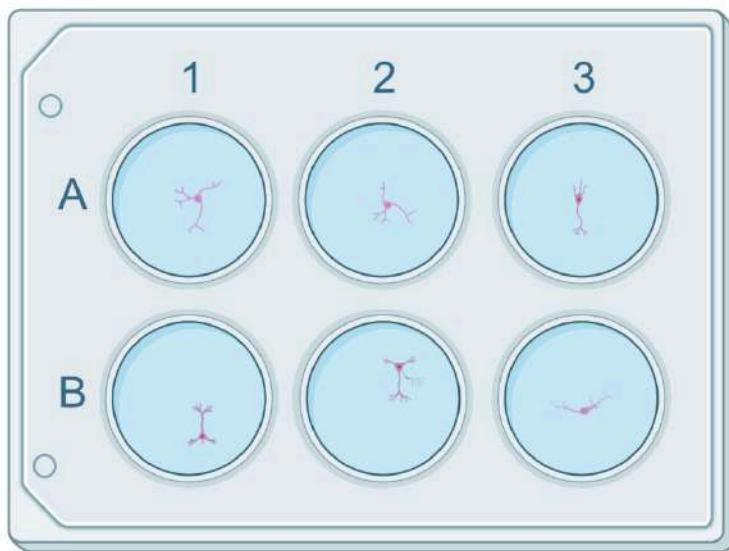
L'unica differenza determinante è che, in una fase precoce dello sviluppo, alcune larve vengono nutritte esclusivamente con pappa reale, mentre le altre no. Quelle nutritte con pappa reale diventano regine.

1. Come è possibile che una differenza nella alimentazione in un periodo limitato della ontogenesi risulti in due individui che pur avendo lo stesso genoma sviluppano caratteristiche così diverse? Quale meccanismo molecolare può spiegare questa differenziazione?
2. Ritieni plausibile che questo fenomeno sia controllato da un unico gene? In che modo un confronto molecolare tra regine e operaie potrebbe aiutare a comprendere i meccanismi che determinano la longevità della regina?

## ADMISSION TO THE I YEAR OF BIOLOGICAL SCIENCES

### Problem 1

A group of researchers has developed a method to grow neurons in tiny Petri dishes that allow a single neuron per dish to be maintained in culture.



Recordings of these neurons show how they spontaneously emit action potentials despite not receiving synapses from other neurons.

The candidate should provide a possible explanation for the following observations:

1. The frequency of action potentials acutely increases if the K<sup>+</sup> concentration in the culture medium is increased.
2. Action potentials disappear if Ca<sup>++</sup> is completely eliminated from the culture medium.
3. Action potentials disappear after incubation with bungarotoxin, a poison that binds to acetylcholine receptors.
4. Action potentials disappear after incubation for prolonged periods with high K<sup>+</sup> concentration medium (help: consider that under these conditions neurons emit action potentials at high frequency for a prolonged period).

### Problem 2

A group of researchers is interested in understanding the mechanisms by which protein synthesis is regulated. They have three different technologies at their disposal: RNAseq, RIBOseq, and MS. The candidate is not required to know how these technologies work but should simply reason about the data they produce:

- RNAseq: allows for the quantification of the concentration of all RNAs within a sample.
- RIBOseq: similar to RNAseq, but the analysis is preceded by a purification of ribosomes. In practice, the sample is treated to separate ribosomes from the rest of the cytoplasm (again, the candidate is not required to know this method). In this way, RNAs to which ribosomes are bound can be quantified specifically.
- MS: allows for the quantification of protein concentration within a sample.

Experiments are conducted in cultured cells before and after treatment with a given substance (the details are not relevant for the problem's solution).

1. What order of magnitude do we expect for the RNAs of a gene for which RNAseq measures a concentration  $> 0$  in a eukaryotic cell?
2. Some RNAs have quantifiable expression with RNAseq, but RIBOseq measures a concentration  $= 0$ . Excluding any possible technical errors, how can you explain this phenomenon?
3. The researchers focus on proteins whose concentration increases after treatment, and by studying the changes in the concentration of the relative mRNAs, they discover that these can be divided into three categories.

Category	RNAseq	RIBOseq
A	increases	increases
B	unchanged	increases
C	unchanged	unchanged

The candidate proposes for each of these categories of proteins a mechanism to explain their behavior (increase or no change)

### Problem 3

A researcher performs total nucleic acid extraction from a tissue sample and proceeds with the analysis of its base composition. After the analysis, the researcher observes that:

- The  $(A+T):(C+G)$  ratio is significantly different from 1.
- The Adenine:Thymine (A:T) ratio is significantly different from 1:1.

- The Cytosine:Guanine (C:G) ratio is also significantly different from 1:1 and different from (A:T).

Based on these observations and your knowledge of molecular biology, answer the following questions, explaining your reasoning:

1. Constancy of ratios: is there a general rule according to which the A:T and C:G ratios should be constant across different species or within the same organism? If so, what is this rule and why should it apply?
2. Expected ratios: are the ratios observed by the researcher ( $A:T \neq 1$  and  $C:G \neq 1$ , and  $A:T \neq C:G$ ) what you would normally expect in a total nucleic acid sample from a healthy eukaryotic tissue? Explain your answer.
3. Explanation of deviations: what conditions or factors could explain the observed base ratios, i.e., their deviation from expected values and the fact that the A:T and C:G ratios are different from each other? List and describe at least two possible biological scenarios that could lead to these results.

#### **Problem 4**

A researcher is studying a culture of proliferating cells, whose cell cycle is not synchronized. To investigate the proliferation of these cells, the researcher decides to add a radioactive analog of thymidine (a DNA synthesis marker) to the culture and leaves it to act for 0.5, 1, 2, 3 or 4 hr, observing respectively 12.5, 15, 20, 25, 30% of marked cells. Furthermore, they observe that the peak of radioactive mitotic cells is 6 hours after the addition of radioactive thymidine.

Based on this information and your knowledge of the cell cycle, answer the following questions, justifying your answer:

1. Percentage of dividing cells (understood as cells transitioning from the S phase of DNA synthesis): What percentage of the cell population is actively dividing at a given moment? Justify your answer.
2. Deductions on cell cycle phases: considering the provided data, can you deduce anything regarding the duration or proportion of the different phases of the cell cycle (G1, S, G2, M) in this population? Explain which phases are affected by the analog's incorporation and what the percentage of marked cells implies.
3. Length of individual cell cycle: is it possible to determine the average length of a single cell cycle (i.e., the time required for a single cell to complete one cycle) based solely on this data? If so, what would it be? If not, why not, and what additional information would be needed?

### Problem 5

1. Mendel was the first to formulate a genetic theory based on precise numbers and lay the foundation for all subsequent studies. Below are the original numbers from the cross produced by pure lines to generate the first generations of offspring.

P1	P2	F2	
smooth + yellow	rough + yellow	smooth + yellow 5474	rough + yellow 1850
smooth + yellow	smooth + green	smooth + yellow 6002	smooth + green 2001
purple flower	white flower	purple flower 705	white flower 224
green pod	yellow pod	green pod 428	yellow pod 152

What can you say from these observations? Do you notice any discrepancies from the theoretical model underlying these observations? How could they be justified?

2. A strain of laboratory mice exhibits a genetic disease, and the phenotype is sex-dependent. Females can have a severe (G) or mild (L) manifestation. Males, however, only have a mild (L) manifestation.

The strain is stable, meaning that crossing G phenotype ♀ with L phenotype ♂ results in offspring composed of:

♀ 100% G phenotype

♂ 100% L phenotype

Crossing L phenotype ♀ with L phenotype ♂ results in offspring composed of:

♀ 50% G phenotype and 50% L phenotype

♂ 50% L phenotype and 50% unaffected

Crossing G phenotype ♀ with unaffected ♂ from a different strain results in offspring composed of:

♀ 100% L phenotype

♂ 100% L phenotype

Crossing unaffected ♀ from a different strain with L phenotype ♂ results in offspring composed of:

♀ 100% L phenotype

♂ 100% unaffected

Propose a possible hereditary basis for this pathology.

### Problem 6

In some bee species, such as *Apis mellifera*, individuals can take on very different biological roles: queens live for over 5 years and are fertile, while genetically identical worker bees live only a few weeks or months and are sterile.

The only determining difference is that, at an early stage of development, some larvae are fed exclusively with royal jelly, while others are not. Those fed royal jelly become queens.

1. How is it possible that a difference in diet during a limited period of ontogenesis results in two individuals, who despite having the same genome, develop such distinct characteristics? What molecular mechanism can explain this differentiation?
2. Do you consider it plausible that this phenomenon is controlled by a single gene? How might a molecular comparison between queens and workers help to understand the mechanisms that determine the queen's longevity?

**SCUOLA NORMALE SUPERIORE**  
**CONCORSO DI AMMISSIONE AL PRIMO ANNO DEL CORSO ORDINARIO**  
**PROVA SCRITTA INTEGRATA DI MATEMATICA E FISICA**  
**PER CHIMICA, GEOLOGIA, SCIENZE BIOLOGICHE**  
 28 Agosto 2025

**Esercizio 1.** Siano  $r > 0, \alpha > 0$  parametri, siano date nel piano di coordinate  $(x, y)$  la parabola  $y = x^2$  e la circonferenza

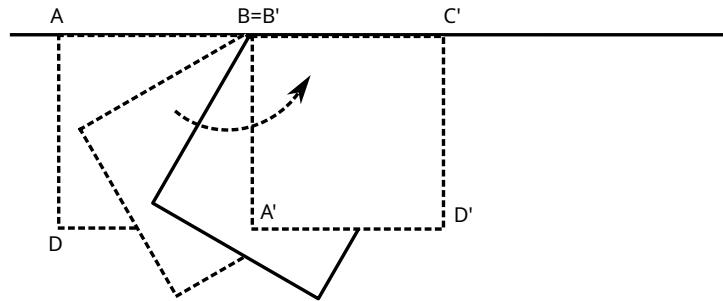
$$(y - \alpha)^2 + x^2 = r^2$$

di centro  $(0, \alpha)$  e raggio  $r$ . Mostrate che

- se  $\alpha > 1/2$  allora esiste un unico  $r > 0$  tale che la circonferenza sia tangente alla parabola in due punti diversi;
- se  $0 < \alpha < 1/2$  allora esiste un unico  $r > 0$  tale che la circonferenza sia tangente alla parabola in un solo punto, e non intersechi la parabola in altri punti.

*Dimostrate compiutamente sia l'esistenza che l'unicità di un tale  $r$ .*

**Esercizio 2.** Un pennello quadrato di lato 1cm è appoggiato su un pavimento, e si muove avendo sempre un vertice (che non può strisciare) collegato alla parete; cioè, ogni mossa è una rotazione (in senso anti-orario) intorno a un vertice successivo, come in figura, dove il pennello inizia dal quadrato  $ABCD$  e ruota intorno a  $B$  fino al quadrato  $A'B'C'D'$  — nella mossa successiva il pennello ruoterà intorno a  $C'$ .



Sia  $A_n$  l'area del pavimento colorata dal pennello dopo  $n$  mosse.

Si mostri che

$$A_n \geq \left( n + 1 + \frac{2n+1}{2} \left( \sqrt{7}/2 - 1 \right) \right) \text{ cm}^2$$

e

$$A_n \leq \left( 1 + \frac{n\pi}{2} - \frac{(n-1)}{2} \left( \sqrt{7}/2 - 1 \right) \right) \text{ cm}^2.$$

**Esercizio 3.** Sul piano viene tracciata una griglia regolare di ampiezza  $N \times M$ , dove i nodi sono equispaziati; in corrispondenza di ogni nodo è posto verticalmente uno specchio semiriflettente inclinato di  $45^\circ$  rispetto alla griglia; a sinistra del primo specchio è posto un emettitore di particelle; alla destra di ogni riga e in cima a ogni colonna è posto un

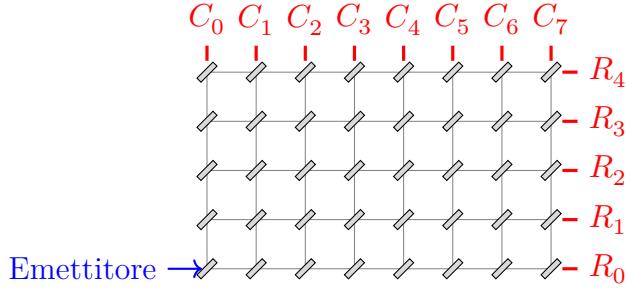


Figura 1: Figura per esercizio 3, con  $N = 8, M = 5$

rivelatore di particelle, come nello schema in figura 1 (in cui  $N = 8, M = 5$ ). Sia  $p$  un parametro fissato con  $0 < p < 1$ , sia  $q = 1 - p$ . Quando la particella incontra uno specchio (da qualunque lato arrivi), prosegue nella stessa direzione con probabilità  $p$  oppure viene riflessa dallo specchio con probabilità  $q$ .

Calcolare la probabilità che la particella ecciti il rivelatore  $R_m$  o  $C_n$  (con  $0 \leq n \leq N - 1, 0 \leq m \leq M - 1$ ). Precisamente, mostrate che la probabilità che ecciti  $R_m$  si può scrivere come

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{i,j} p^i q^j$$

con  $a_{i,j}$  numeri naturali; similmente la probabilità che ecciti  $C_n$  si può scrivere come

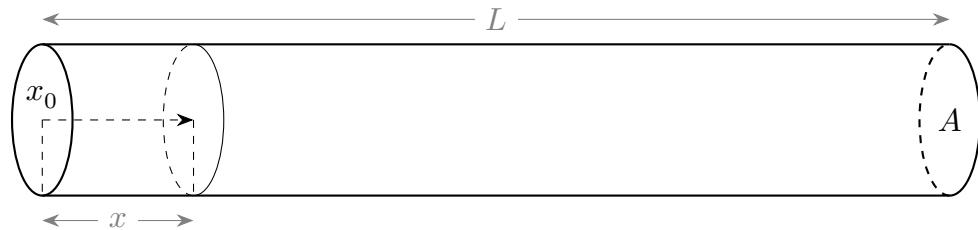
$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M b_{i,j} p^i q^j$$

con  $b_{i,j}$  numeri naturali; ed esprimete  $a_{i,j}$  e  $b_{i,j}$  usando una formula che usi  $i, j$  e (se necessario) alcuni dei parametri  $n, m, N, M$ .

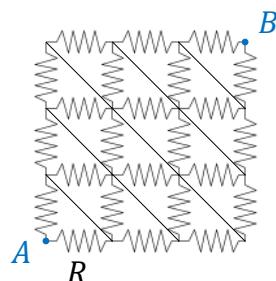
**Esercizio 4.** Una navicella spaziale si trova in un'orbita circolare di raggio  $R_0$  intorno alla Terra, e vuole spostarsi in un'altra orbita circolare di raggio  $R_1$  più distante. La navicella è a corto di carburante e i suoi propulsori possono dare solo due spinte in direzione tangente alla sua velocità, in avanti o indietro, in due momenti diversi e per un tempo molto piccolo. Calcolare la differenza di velocità che queste due spinte devono fornire alla navicella, e il tempo che serve per passare dall'orbita di raggio  $R_0$  a quella di raggio  $R_1$ .

**Esercizio 5.** Un cilindro di lunghezza  $L$ , area di base  $A$  e volume  $V_0 = L \cdot A$  giace orizzontale in contatto termico con l'ambiente circostante a temperatura  $T_a$ , condizione che assicura che entro un certo tempo  $\tau$  la temperatura interna al cilindro viene riportata alla temperatura dell'ambiente  $T_a$ . Il cilindro contiene una miscela di proporzioni ignote di un gas perfetto monoatomico e un gas perfetto biatomico a pressione atmosferica  $P_a$  e temperatura  $T_a$ , e ha un tappo ermetico costituito da un disco mobile senza attrito posto alla sua estremità sinistra. Se il gas viene compresso spostando il tappo verso destra a una distanza  $x \ll L$  dalla posizione di equilibrio iniziale  $x_0$ , esercita una forza repulsiva misurabile con un dinamometro. La forza misurata dipende dal tempo impiegato  $t$  per spostare il tappo, e viene misurato un rapporto  $R_F$  tra la forza misurata dopo uno

spostamento veloce con  $t \ll \tau$  e quella misurata dopo uno spostamento lento con  $t \gg \tau$ . In ogni caso la velocità dei movimenti del tappo rimane molto minore della velocità tipica dovuta all'agitazione termica delle molecole della miscela di gas, in modo da assicurare in ogni istante la validità dell'equazione di stato dei gas perfetti. Calcolare la frazione in termini di moli del gas monoatomico sul totale delle moli di gas in funzione di  $R_F$ . [Si tenga presente che per maggiore chiarezza la figura non mostra  $x \ll L$ .]



**Esercizio 6.** Si consideri una griglia quadrata  $3 \times 3$  composta da resistenze tutte identiche tra loro di valore  $R$ . Collegamenti di resistenza trascurabile sono posti lungo le diagonali, come in figura. Quanto vale la resistenza totale tra i morsetti  $A$  e  $B$ ?



**SCUOLA NORMALE SUPERIORE**  
**CONCORSO DI AMMISSIONE AL PRIMO ANNO DEL CORSO ORDINARIO**  
**PROVA SCRITTA INTEGRATA DI MATEMATICA E FISICA**  
**PER CHIMICA, GEOLOGIA, SCIENZE BIOLOGICHE**  
 English Version  
 28 Agosto 2025

**Exercise 1.** Consider, in the Cartesian plane with coordinates  $(x, y)$ , a parabola defined by the equation  $y = x^2$  and a circle defined by the equation

$$(y - \alpha)^2 + x^2 = r^2$$

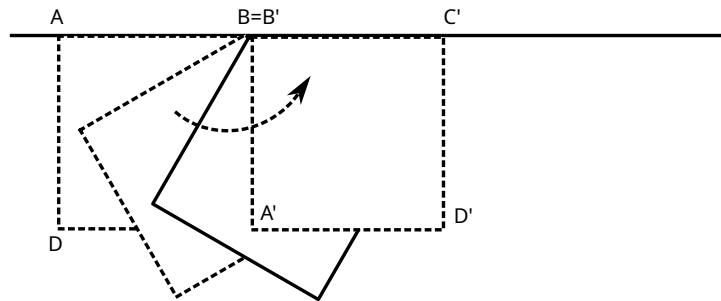
with center in  $(0, \alpha)$  and radius  $r$ , where  $r > 0, \alpha > 0$ .

Prove that

- if  $\alpha > 1/2$  then there exists an unique  $r > 0$  such that the parabola and the circle meet in two different points, where they are tangent;
- if  $0 < \alpha < 1/2$  then there exists an unique  $r > 0$  such that the parabola and the circle meet in only one point, where they are tangent.

*Prove thoroughly that such a value  $r$  exists, and that it is unique.*

**Exercise 2.** A square brush whose side length is 1cm lies flat on the floor, with one side against a wall. It moves by rotating around a vertex that stays fixed to the wall, without sliding. Each step consists in a counterclockwise rotation around a vertex, as in the figure, where the starting position of the brush is the square  $ABCD$ ; the brush rotates around  $B$  until its position becomes the square  $A'B'C'D'$ , and the next step will be a rotation around  $C'$ .



Let  $A_n$  denote the area of the floor colored by the brush after  $n$  steps.

Show that

$$A_n \geq \left( n + 1 + \frac{2n+1}{2} \left( \sqrt{7}/2 - 1 \right) \right) \text{ cm}^2$$

and

$$A_n \leq \left( 1 + \frac{n\pi}{2} - \frac{(n-1)}{2} \left( \sqrt{7}/2 - 1 \right) \right) \text{ cm}^2.$$

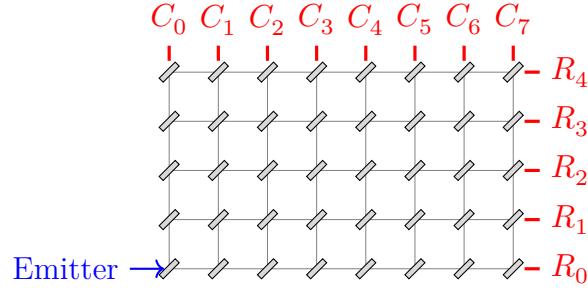


Figure 1: Setup of exercise 3, with  $N = 8, M = 5$ .

**Exercise 3.** An  $N \times M$  square grid is drawn on the plane. At each vertex, we place a vertical semi-reflective mirror forming an angle of  $45^\circ$  with respect to the grid; to the left of the first mirror, there is a particle emitter; at the end of each row and column there is a particle detector, as in Figure 1 (with  $N = 8, M = 5$ ). Let  $p$  be a given real number such that  $0 < p < 1$ , and let  $q = 1 - p$ . When an emitted particle encounters a mirror (from whatever direction) it continues in the same direction with probability  $p$ , or it is reflected by the mirror with probability  $q$ .

Compute the probability that the particle excites the detector  $R_m$  or  $C_n$  (with  $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq M-1$ ). More precisely, show that the probability of being detected by  $R_m$  can be written as

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{i,j} p^i q^j$$

for some natural numbers  $a_{i,j}$ ; similarly, the probability of being detected by  $C_n$  can be written as

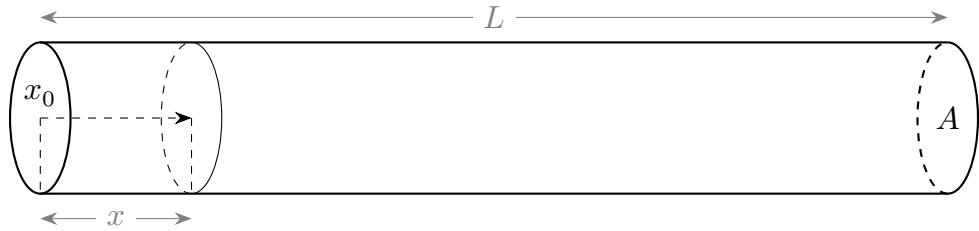
$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M b_{i,j} p^i q^j$$

for some natural numbers  $b_{i,j}$ . Express  $a_{i,j}$  and  $b_{i,j}$  as a function of  $i, j$  and (if needed) of some of the parameters  $n, m, N, M$ .

**Exercise 4.** A spacecraft is in a circular orbit of radius  $R_0$  around the Earth, and wants to move to another circular orbit of radius  $R_1$ , which is further away. The spacecraft is low on fuel and its thrusters can only provide two impulses tangent to its velocity, either forwards or backwards, at two different times and for a very small duration. Calculate the velocity difference that these two impulses must provide to the spacecraft, and the time it takes to go from the orbit of radius  $R_0$  to that of radius  $R_1$ .

**Exercise 5.** A cylinder of length  $L$ , base area  $A$ , and volume  $V_0 = L \cdot A$  lies horizontally in thermal contact with the surrounding environment at temperature  $T_a$ , a condition that ensures that within a certain time  $\tau$  the internal temperature of the cylinder returns to the environmental temperature  $T_a$ . The cylinder contains a mixture, in unknown proportions, of a monatomic ideal gas and a diatomic ideal gas at atmospheric pressure  $P_a$  and temperature  $T_a$ . It has an airtight stopper consisting of a frictionless movable disk located at its left end. If the gas is compressed by moving the stopper to the right by a distance  $x \ll L$  from its initial equilibrium position  $x_0$ , it exerts a repulsive force

measurable with a dynamometer. The measured force depends on the time taken  $t$  to move the stopper, and a ratio  $R_F$  is measured between the force recorded after a fast displacement with  $t \ll \tau$  and that recorded after a slow displacement with  $t \gg \tau$ . In all cases, the speed of movement of the stopper remains much less than the typical velocity due to the thermal agitation of the gas molecules in the mixture, in order to ensure the validity of the equation of state of ideal gases at all times. Calculate the fraction, in terms of moles, of the monatomic gas over the total number of moles of the gas as a function of  $R_F$ . [Note: for clarity, the figure does not show that  $x \ll L$ .]



**Exercise 6.** A square  $3 \times 3$  grid is made up of identical resistors of resistance  $R$ . Short-cuts are placed along the diagonal directions as shown in the figure. What is the total resistance between the nodes  $A$  and  $B$ ?

