

SCUOLA NORMALE SUPERIORE,  
 CONCORSO DI AMMISSIONE AL QUARTO ANNO DEL CORSO  
 ORDINARIO  
 PROVA SCRITTA DI ANALISI  
 27 Agosto 2025

**Esercizio 1.** Siano fissati  $0 < \alpha < \beta$ . Siano  $Y_n \geq 0$  variabili aleatorie reali, supponiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n^\alpha] = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n^\beta] = 1$ : mostrare che  $Y_n \xrightarrow{P} 1$  cioè  $Y_n$  converge a 1 in probabilità per  $n \rightarrow \infty$ .

**Esercizio 2.** Dato  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo non vuoto, una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *Hölderiana di esponente  $\alpha$*  se esiste una costante  $C > 0$  per cui

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha .$$

Sia  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^\alpha$ . Dire se  $f$  è uniformemente continua. Dire per quali  $\alpha \in (0, 1]$  si ha che  $f$  è Hölderiana di esponente  $\alpha$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = x + \sin x; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per  $n$  intero, sia anche

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ volte}}.$$

Determinare gli intervalli aperti  $(a, b)$  sui quali la successione  $(f_n)_n$  converge uniformemente.

**Esercizio 4.** Si studi qualitativamente l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)) + \log(1 + x + y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

per  $x \geq 0$ .

Si discuta l'esistenza e unicità locale della soluzione, l'intervallo  $[0, x_+)$  massimale di esistenza, il segno di  $y(x)$  su questo intervallo, le zone di monotonia della soluzione.

**Esercizio 5.** Trovate un esempio di spazio topologico  $(X, \tau)$  e di  $C_1, C_2 \subseteq X$  compatti tali che  $C_1 \cap C_2$  non è compatto.

**Prova di Metodi Matematici per la Fisica, Meccanica Classica ed Elettromagnetismo**

**Esercizio 1.** Una piccola massa di prova  $m$  passa vicino a un oggetto massiccio di massa  $M$  (ad esempio, una stella) con un parametro di impatto  $b$ .

- (i) Utilizzando la gravità newtoniana, calcolare l'angolo di deflessione  $\alpha$  della massa di prova dovuto all'attrazione gravitazionale di  $M$ . Assumere che la deflessione sia piccola ( $\alpha \ll 1$ ) e approssimare la traiettoria come una linea retta con una piccola perturbazione. Si noti che il valore derivato di  $\alpha$  è un fattore 2 più piccolo di quello corretto ottenuto con la Relatività Generale per i fotoni ( $m = 0$ ). Correggere per questo fattore. Di seguito: (a) Uguagliare la deflessione all'angolo sotteso dal raggio di Einstein  $R_E$ , definito come il parametro di impatto per cui la deflessione causa uno spostamento apparente della posizione esattamente di  $R_E/D_L$  (dove  $D_L$  è la distanza della lente dall'osservatore); (b) Ricavare l'espressione per  $R_E$  in termini di  $M$ ,  $D_L$  e  $D_S$  (la distanza della sorgente dall'osservatore).
- (ii) Usando il risultato precedente e assumendo un rapporto di distanza lente-sorgente  $\beta = 0.5$ , stimare la distanza ottimale della sorgente per ricerche di lenti gravitazionali per pianeti giganti a 5 UA (1 UA = distanza media Terra-Sole =  $1.496 \times 10^8$  km) attorno alla loro stella madre quando le stelle-lente hanno massa (a) 1 massa solare  $\approx 2 \times 10^{30}$  kg, (b) 0.2 masse solari (si ricordi che il pianeta deve essere vicino all'anello di Einstein per produrre un segnale). Confrontare le scale in (a) e (b) con le dimensioni della nostra Galassia (raggio  $r_G \approx 10^{18}$  km). Cosa implica questo per le ricerche di lenti gravitazionali per tali pianeti?

**Esercizio 2.** Una sfera omogenea di massa  $m$  e raggio  $a$  rotola senza strisciare sulla superficie interna di un cono di semiapertura  $\theta$ , e asse parallelo al campo gravitazionale,  $\vec{g} = -g\hat{z}$ . Il vertice del cono punta verso il basso nella stessa direzione di  $\vec{g}$ . Si assuma che le condizioni iniziali siano tali che il centro di massa della sfera si muova di moto circolare su un piano orizzontale, con velocità angolare costante  $\dot{\varphi}$  e distanza costante  $b$  dall'asse del cono. Calcolare  $\dot{\varphi}$  nel caso in cui la velocità angolare della sfera, istante per istante, sia diretta lungo la direzione della generatrice del cono.

**Esercizio 3.** Un dipolo elettrico elementare  $\mathbf{p}$  si trova al centro di una cavità sferica di raggio  $a$  realizzata all'interno di un materiale dielettrico isotropo infinitamente esteso di suscettività elettrica  $\chi_e > 0$ . Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio. Si commenti in particolare cosa succede nel limite  $\chi_e \gg 1$ .

**Esercizio 4.** Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  inizialmente ferma nel vuoto viene investita da un'onda elettromagnetica piana, polarizzata linearmente, di frequenza  $\omega$  e intensità  $I$ . Si dica per quali valori di  $I$  e  $\omega$  il moto della particella si mantiene sempre non-relativistico e, in questo regime, si determinino, al primo ordine non banale nell'interazione magnetica, la frequenza e la densità angolare di potenza (mediata nel tempo) della radiazione diffusa a grande distanza dalla particella.

(altri esercizi sul retro)

**Esercizio 5.** La funzione di Airy  $Ai(x)$  è un’importante funzione fisica che emerge nel calcolo delle autofunzioni di potenziali 1D tramite la tecnica WKB. Se ne vuole dimostrare, usando metodi di integrazione nel piano complesso, il ben noto andamento asintotico per  $x \rightarrow +\infty$

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) dt \rightarrow \frac{C}{x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad (1)$$

dove  $C$  è una costante.

- (i) Mostrare che la funzione  $Ai(x)$  ammette la seguente rappresentazione integrale nel piano complesso

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{xt - \frac{t^3}{3}} dt \quad (2)$$

dove  $\mathcal{C}$  è un contorno di integrazione che percorre la semiretta  $\text{Arg}(z) = -\frac{2\pi}{3}$ , raggiunge l’origine e poi si allontana verso infinito percorrendo la semiretta  $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$ .

- (ii) Mostrare che il contorno di integrazione in Eq. (2) può essere deformato in un contorno tale che la parte immaginaria dell’esponente  $xt - \frac{t^3}{3}$  sia sempre nulla.  
 (iii) Sia  $t = a + ib$ , mostrare, usando il contorno trovato al punto (ii) e dopo un opportuno riscalamento di  $b$ , che l’integrale sul piano complesso si trasforma in un integrale reale della forma

$$Ai(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{3/2}\phi(b)} db, \quad (3)$$

tale che  $\phi(b)$  è minima in 0 e  $\phi(0) = 2/3$ . Discutere come ottenere lo sviluppo asintotico desiderato a partire da questo integrale.

[Nota: la costante  $C$  vale  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ , il calcolo esplicito di questa costante non è richiesto dall’esercizio.]

**Test of Mathematical Methods for Physics, Classical Mechanics, Electromagnetism**

**Problem 1.** A small test mass  $m$  passes near a massive object of mass  $M$  (e.g., a star) with an impact parameter  $b$ .

- (i) Using Newtonian gravity, calculate the deflection angle  $\alpha$  of the test mass due to the gravitational attraction of  $M$ . Assume the deflection is small ( $\alpha \ll 1$ ), and approximate the trajectory as a straight line with a small perturbation. Note that the derived value of  $\alpha$  is a factor of 2 smaller than the correct one derived using General Relativity for photons ( $m = 0$ ). Correct for this factor to answer the following question. (a) Equate this deflection to the angle subtended by the Einstein radius  $R_E$ , defined as the impact parameter where the deflection causes the apparent position to shift by exactly  $R_E/D_L$  (where  $D_L$  is the lens distance); (b) Derive the expression for  $R_E$  in terms of  $M$ ,  $D_L$ , and  $D_S$  (the source distance).
- (ii) Using the previous result, and assuming a lens-source distant ratio of  $\beta = 0.5$  estimate the optimal source distance for gravitational lensing searches for giant planets at 5 AU (1 AU = mean Earth-Sun distance =  $1.496 \times 10^8$  km) around their parent star when the lens stars are (a) 1 Msun, (b) 0.2 Msun in mass (recall that the planet needs to be close to the Einstein ring to produce a signal). Compare the scales in (a) and (b) to the size of the our Galaxy (radius  $r_G \approx 10^{18}$  km). What does this imply for lensing searches of such planets?

**Problem 2.** A homogeneous sphere of mass  $m$  and radius  $a$  rolls without slipping on the inner surface of a cone with a semi-angle  $\theta$ , and its axis parallel to the gravitational field,  $\vec{g} = -g\hat{z}$ . The vertex of the cone points downwards in the same direction as  $\vec{g}$ . Assume that the initial conditions are such that the center of mass of the sphere moves in circular motion on a horizontal plane, with constant angular velocity  $\dot{\varphi}$  and constant distance  $b$  from the cone's axis. Calculate  $\dot{\varphi}$  in the case where the angular velocity of the sphere, at any given instant, is directed along the direction of the cone's generatrix.

**Problem 3.** An elementary electric dipole  $\mathbf{p}$  sits in the center of a spherical hole of radius  $a$  surrounded by an infinite homogeneous and isotropic medium with electric susceptibility  $\chi_e > 0$ . Determine the electric field in the entire space. In particular, discuss what happens in the limit  $\chi_e \gg 1$ .

**Problem 4.** A particle of mass  $m$  and electric charge  $q$ , initially at rest in vacuum, is subject to an electromagnetic plane wave, linearly polarized, with frequency  $\omega$  and intensity  $I$ . Determine for which values of  $\omega$  and  $I$  the motion of the particle can be always treated as non-relativistic and, in this regime, determine to the first non-trivial order in the magnetic interaction, which are the frequency and angular power spectrum (mediated over one period) of the EM radiation scattered at large distance from the particle.

(more problems on the back)

**Problem 5.** The Airy function  $Ai(x)$  plays an important role in the computation of eigenfunctions for one-dimensional potentials using the WKB approximation. We aim to prove, using methods of complex plane integration, the well-known asymptotic behavior for  $x \rightarrow +\infty$

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) dt \rightarrow \frac{C}{x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad (1)$$

where  $C$  is a constant.

- (i) Show that  $Ai(x)$  admits the following integral representation in the complex plane

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{xt - \frac{t^3}{3}} dt \quad (2)$$

where  $\mathcal{C}$  is a contour of integration that runs along the half-line  $\text{Arg}(z) = -\frac{2\pi}{3}$ , arrives in the origin and then goes toward infinity along the half-line  $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$ .

- (ii) Show that the integration contour in Eq. (2) can be deformed in a contour such that the imaginary part of the exponent  $xt - \frac{t^3}{3}$  is always 0.  
 (iii) Let  $t = a + ib$ , show, using the contour found in point (ii) and after an appropriate rescaling of  $b$ , that the integral on the complex contour can be written as a real integral of the form

$$Ai(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{3/2}\phi(b)} db, \quad (3)$$

such that  $\phi(b)$  is minimum in 0 and  $\phi(0) = 2/3$ . Discuss how to obtain the desired asymptotic expansion starting from this integral.

[Note: the constant  $C$  is equal to  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ , the explicit calculation of this constant is not required by the exercise.]

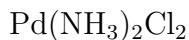
# Ammissione al IV anno - Corso ordinario, Chimica. Anno Accademico 2025/26

Prova Scritta di Chimica Generale

27/08/2025

## Esercizio 1

Per i seguenti composti:



- a. si disegnino le strutture molecolari di tutti gli eventuali isomeri;
- b. si indichi il gruppo centrale di simmetria;
- c. si valuti quali strutture hanno momento di dipolo diverso da zero;
- d. si valuti quali strutture sono chirali.

## Esercizio 2

Un accumulatore a piombo contiene un elettrodo di piombo (1,50 kg) e uno di  $\text{PbO}_2$  (1,50 kg) depositato su un supporto conduttore. Ambedue gli elettrodi sono immersi in una soluzione di  $\text{H}_2\text{SO}_4$  in eccesso rispetto alla quantità stochiometrica. La reazione complessiva è:



- a. Calcolare la quantità di elettricità che è prodotta nella scarica.
- b. Calcolare la massa di acido che si è consumato.

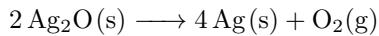
## Esercizio 3

Illustrare graficamente la curva di titolazione (pH rispetto al volume aggiunto,  $V_a$ ) ottenuta aggiungendo a una soluzione di 10.0 mL di base 0.100 M ( $\text{pK}_{b1} = 4.0$ ,  $\text{pK}_{b2} = 9.0$ ) una soluzione acida di HCl 0.100 M. In particolare, descrivere in termini di pH e  $V_a$ :

- a. i due punti di equivalenza della titolazione.
- b. i due punti intermedi di neutralizzazione della titolazione.

## Esercizio 4

L'ossido di argento, che può decomporsi come



ha una energia libera standard di formazione di -11.20 kJ/mole a 25 °C. Quanto argento metallico (peso atomico = 107.87 g/mole) si potrà formare a partire da 1 g di ossido di argento (peso molecolare = 231.74 g/mole) posto in un contenitore chiuso contenente una mole di azoto, assumendo che l'intero sistema sia mantenuto a pressione e temperatura costanti ( $p = 1$  bar;  $T = 25$  °C)?

## Esercizio 5

A 30 gradi centigradi una soluzione di uno zucchero non volatile in acqua ha una tensione di vapore di 31.207 Torr, mentre l'acqua pura ha una tensione di vapore di 31.824 Torr. Calcolare la pressione osmotica della soluzione (peso molecolare dell'acqua = 18 g/mole, densità = 1 g/cm<sup>3</sup>).

**Esercizio 6**

*Dissertazione:* Si discuta l'effetto chelante nella chimica dei complessi metallici attraverso esempi illustrativi.

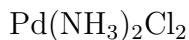
# Ammissione al IV anno - Corso ordinario, Chimica. Anno Accademico 2025/26

Prova Scritta di Chimica Generale

27/08/2025

## Exercise 1

For the following compounds:



- a. draw the molecular structures of all possible isomers;
- b. indicate the symmetry point group;
- c. evaluate which structures have a dipole moment other than zero;
- d. evaluate which structures are chiral.

## Exercise 2

A lead-acid battery contains a lead electrode (1.5 kg) and a  $\text{PbO}_2$  electrode (1.5 kg) deposited on a conductive substrate. Both electrodes are immersed in a solution of  $\text{H}_2\text{SO}_4$  in excess with respect to the stoichiometric amount. The overall reaction is:



- a. Calculate the amount of electricity that is produced in the discharge.
- b. Calculate the mass of acid that is consumed.

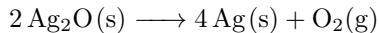
## Exercise 3

Illustrate graphically the titration curve (pH versus added volume,  $V_a$ ) obtained by adding to a solution of 10.0 mL of 0.100 M base ( $\text{pK}_{b1}$  4.00,  $\text{pK}_{b2}$  9.00) an acidic solution of 0.100 M HCl. In particular, describe in terms of pH and  $V_a$ :

- a. the two equivalence points.
- b. the two half-neutralization points.

## Exercise 4

Silver oxide, which can decompose as:



has a standard free energy of formation of -11.20 kJ/mol at 25 °C. How much metallic silver (atomic weight = 107.87 g/mol) can be formed from 1 g of silver oxide (molecular weight = 231.74 g/mol) placed in a closed container containing 1 mole of nitrogen, assuming that the entire system is kept at constant pressure and temperature ( $p = 1$  bar;  $T = 25$  °C)?

## Exercise 5

At 30 degrees Celsius, a solution of a nonvolatile sugar in water has a vapor pressure of 31.207 Torr, while pure water has a vapor pressure of 31.824 Torr. Calculate the osmotic pressure of the solution (molecular weight of water = 18 g/mol, density = 1 g/cm<sup>3</sup>).

**Exercise 6**

*Dissertation:* Discuss the chelating effect in metal complexes with illustrative examples.

## AMMISSIONE AL IV ANNO - BIOLOGIA MOLECOLARE

### Problema 1

Un ricercatore sta studiando l'espressione di un gene X in due diversi tessuti dello stesso organismo, il Tessuto A e il Tessuto B. Utilizzando tecniche molecolari, determina che i livelli di mRNA del gene X sono simili in entrambi i tessuti. Tuttavia, la quantità della proteina X, codificata da questo mRNA, è 10 volte superiore nel Tessuto A rispetto al Tessuto B.

Basandosi su queste osservazioni, e considerando che la trascrizione del gene X sembra essere regolata in modo simile in entrambi i tessuti, rispondi alle seguenti domande, proponendo esperimenti specifici per indagare i meccanismi molecolari responsabili di questa differenza nel rapporto mRNA/proteina.

1. Quali sono i due principali processi cellulari che possono influenzare il rapporto tra la quantità di un mRNA e la sua proteina corrispondente, una volta che l'mRNA è stato trascritto? Indica brevemente per ciascun processo un tipo di regolazione che potrebbe essere alterato tra i due tessuti.
2. Proponi almeno due esperimenti specifici e ben motivati che il ricercatore potrebbe eseguire per determinare se la differenza nei livelli proteici è dovuta a:  
a) Differenze nella stabilità dell'mRNA del gene X. b) Differenze nell'efficienza della traduzione dell'mRNA del gene X. Per ogni esperimento, descrivi brevemente la metodologia e cosa ti aspetteresti di osservare per supportare o confutare l'ipotesi.
3. Oltre alla stabilità dell'mRNA e all'efficienza traduzionale, quali altri due meccanismi cellulari (post-traslazionali) potrebbero contribuire a spiegare una differenza di 10 volte nei livelli proteici, anche con mRNA simili? Proponi un esperimento per ciascuno di questi due meccanismi che permetta di valutarne il ruolo nella differenza osservata tra il tessuto A e il tessuto B. Discuti brevemente le sfide nell'interpretazione dei risultati e come potresti distinguere i problemi di efficienza traduzionale.

### Problema 2

Un team di ricerca intende generare un organoide cerebrale *in vitro* a partire da cellule staminali pluripotenti indotte umane (hIPSC) che mimi la connettività funzionale tra la corteccia cerebrale motoria e il midollo spinale. Per guidare la differenziazione e l'assemblaggio, il team ha a disposizione un'ampia gamma di agonisti e antagonisti di vie di segnalazione chiave nello sviluppo neuronale: WNT, BMP, SHH, Acido Retinoico (RA), FGF, EGF, TGF- $\beta$ , e NOTCH.

Assumendo che le hIPSC di partenza siano sane e pluripotenti, rispondi alle seguenti domande, proponendo strategie e giustificando le tue scelte basandoti sulla biologia dello sviluppo del sistema nervoso centrale.

1. Quali sono le prime due fasi cruciali per indirizzare le hIPSC verso un destino neuronale/neuroectodermico? Indica per ciascuna fase le principali vie di segnalazione (tra quelle a disposizione) e il loro ruolo (agonista/antagonista) che sarebbero appropriate per indurre il neuroectoderma e, successivamente, specificare una regione rostrale (corteccia) e una caudale (midollo spinale) dell'asse neurale.
2. Una volta stabilite le identità regionali corticali e spinali, descrivi come il ricercatore dovrebbe procedere per favorire lo sviluppo di popolazioni neuronali rilevanti per la connettività motoria (es. neuroni motori spinali e neuroni corticali di proiezione). Indica per ciascuna popolazione specifica quali fattori (tra quelli a disposizione) sarebbero appropriati per guidare la differenziazione e a quali tempi approssimativi del processo generale (es. "fase iniziale", "fase intermedia", "fase avanzata") dovrebbero essere applicati.
3. Dopo aver generato organoidi corticali e spinali separati, come si dovrebbe procedere per assemblarli in un unico organoide "composite" che permetta l'instaurarsi di una connettività tra i due domini? Quali sfide anticipate potrebbe incontrare il ricercatore nell'ottenere e validare questa connettività *in vitro*? Suggerisci almeno due approcci sperimentali (oltre alla semplice morfologia) per valutare l'effettiva formazione di circuiti funzionali tra la parte corticale e quella spinale dell'organoide assemblato.

### **Problema 3**

Discuti tutti i vari tipi di RNA che conosci con particolare riferimento a quelli regolatori e al loro possibile coinvolgimento nella regolazione dell'espressione genica.

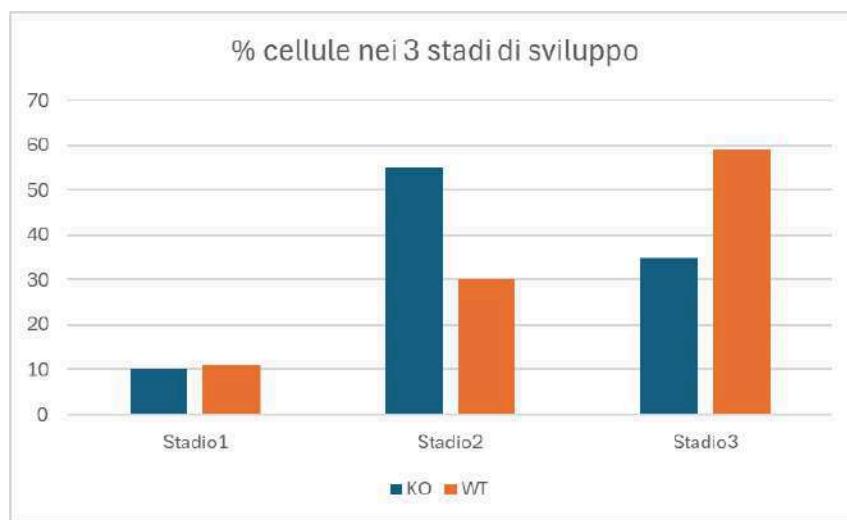
### **Problema 4**

Al giorno d'oggi esistono due strategie principali per studiare l'espressione genica:

- Bulk RNA-seq: si estrae tutto l'RNA di un campione misto di cellule e lo si sequenzia in massa, ottenendo un profilo medio di quanti trascritti di ciascun gene siano presenti.
- Single-cell RNA-seq (scRNA-seq): si isolano singole cellule, si sequenzia l'RNA per ogni cellula e si ricostruisce il profilo trascrizionale cellula per cellula, rivelando l'eterogeneità. Questo approccio è molto più costoso e complesso del bulk.

I frammenti di sequenza (“reads”) prodotti dalle piattaforme più comuni (Illumina) hanno tipicamente lunghezze di 50–150 nucleotidi.

1. Indica nei seguenti casi quale tecnica useresti e perchè:
  - a. Immagina di dover analizzare un campione tumorale eterogeneo in cui si sospettano sottopolazioni resistenti a un farmaco.
  - b. Colonia batterica coltivata in piastra
2. Hai sviluppato *in vitro* due linee cellulari di motoneuroni: una wild-type e l'altra con il KO di un gene F. Esegui prima una quantitative PCR su due geni chiave dello sviluppo che indichiamo ora con J e K che ti risultano down-regolati nelle cellule KO. Quando rifai l'analisi con il scRNA-seq per identificare quale particolare sottopolazione down-regola i due geni non riesci a identificarne alcuna. Quale può essere la spiegazione per un fenomeno simile? Di seguito c'è l'istogramma con le percentuali delle tre sottopolazioni identificate nel scRNA-seq



### Problema 5

Due geni, A e B, entrambi codificanti per proteine, sono correlati e interagiscono funzionalmente tra loro. Per indagare questa relazione, viene generato un organismo transgenico in cui è stata inserita una copia addizionale del gene A, completo del proprio promotore, in una posizione casuale del genoma. L'analisi trascrittomica conferma un aumento significativo dei livelli di RNA messaggero di A nei transgenici rispetto ai controlli.

Si chiede di discutere quali ipotesi molecolari e regolative si possono formulare in ciascuno dei seguenti scenari osservati per il gene B:

1. Nessuna variazione dei livelli di RNA di B rispetto al controllo.

2. Variazione osservata nei livelli di RNA di B, con le seguenti sotto-condizioni:
  - a) l'aumento di B è proporzionale all'aumento di A;  
oppure
  - b) l'aumento di B è costante e indipendente dal grado di sovraespressione di A.
3. I livelli di B non aumentano in condizioni basali, ma aumentano in risposta a uno stimolo ambientale (es. temperatura elevata), e in tal caso l'incremento di B è proporzionale ai livelli di A.

### Problema 6

Due specie di pesci diverse ma strettamente imparentate, che chiameremo specie A e specie B, sono in grado di accoppiarsi in condizioni naturali e di generare embrioni vitali. Tuttavia, si osserva un'interessante asimmetria nei risultati dell'incrocio:

- L'accoppiamento tra maschio A × femmina B genera embrioni che iniziano a svilupparsi ma si arrestano a metà dello sviluppo embrionale, morendo entro pochi mesi.
  - L'accoppiamento maschio B × femmina A, invece, porta a uno sviluppo completo e alla nascita di pesci adulti vitali e fertili.
- 
1. Proponi uno o più possibili meccanismi molecolari o epigenetici che possano spiegare questa asimmetria.
  2. Suggerisci uno o piu' esperimenti che potrebbero essere utili per testare e nel caso confermare la tua ipotesi.

## **ADMISSION TO IV YEAR - MOLECULAR BIOLOGY**

### **Problem 1**

A researcher is studying the expression of gene X in two different tissues of the same organism, Tissue A and Tissue B. Using molecular techniques, they determine that the mRNA levels of gene X are similar in both tissues. However, the amount of protein X, encoded by this mRNA, is 10 times higher in Tissue A compared to Tissue B.

Based on these observations, and considering that the transcription of gene X appears to be regulated similarly in both tissues, answer the following questions, proposing specific experiments to investigate the molecular mechanisms responsible for this difference in the mRNA/protein ratio.

1. What are the two main cellular processes that can influence the ratio between the quantity of an mRNA and its corresponding protein, once the mRNA has been transcribed? Briefly indicate for each process a type of regulation that could be altered between the two tissues.
2. Propose at least two specific and well-justified experiments that the researcher could perform to determine if the difference in protein levels is due to: a) Differences in the stability of gene X mRNA. b) Differences in the efficiency of translation of gene X mRNA. For each experiment, briefly describe the methodology and what you would expect to observe to support or refute the hypothesis.
3. Besides mRNA stability and translational efficiency, what other two cellular mechanisms (post-translational) could help explain a 10-fold difference in protein levels, even with similar mRNA levels? Propose an experiment for each of these two mechanisms to evaluate their role in the observed difference between tissue A and tissue B. Briefly discuss the challenges in interpreting the results and how you could distinguish them from translational efficiency issues.

### **Problem 2**

A research team aims to generate an *in vitro* brain organoid from human induced pluripotent stem cells (hiPSCs) that mimics the functional connectivity between the motor cerebral cortex and the spinal cord. To guide differentiation and assembly, the team has a wide range of agonists and antagonists of key signaling pathways in neuronal development available: WNT, BMP, SHH, Retinoic Acid (RA), FGF, EGF, TGF- $\beta$ , and NOTCH.

Assuming the starting hIPSCs are healthy and pluripotent, answer the following questions, proposing strategies and justifying your choices based on the developmental biology of the central nervous system.

1. What are the first two crucial phases for directing hIPSCs towards a neuronal/neuroectodermal fate? For each phase, indicate the main signaling pathways (from those available) and their role (agonist/antagonist) that would be appropriate to induce neuroectoderm and, subsequently, to specify a rostral (cortical) and a caudal (spinal cord) region of the neural axis.
2. Once cortical and spinal regional identities are established, describe how the researcher should proceed to favor the development of neuronal populations relevant for motor connectivity (e.g., spinal motor neurons and cortical projection neurons). For each specific population, indicate which factors (from those available) would be appropriate to guide differentiation and at what approximate times in the general process (e.g., "initial phase", "intermediate phase", "advanced phase") they should be applied.
3. After generating separate cortical and spinal organoids, how should one proceed to assemble them into a single "composite" organoid that allows for the establishment of connectivity between the two domains? What anticipated challenges might the researcher encounter in obtaining and validating this *in vitro* connectivity? Suggest at least two experimental approaches (beyond simple morphology) to assess the actual formation of functional circuits between the cortical and spinal parts of the assembled organoid.

### **Problem 3**

Discuss all the various types of RNAs you know with particular reference to regulatory RNAs and their possible involvement in the regulation of gene expression.

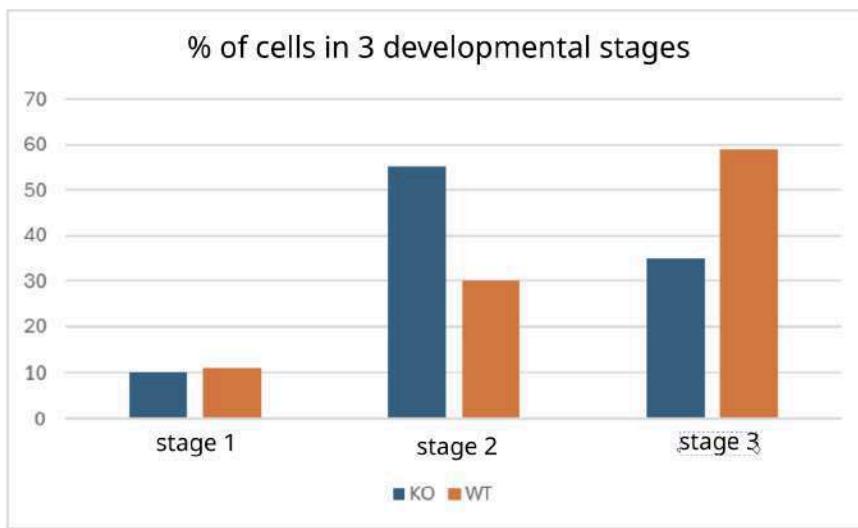
### **Problem 4**

Nowadays, two main strategies exist for studying gene expression:

- Bulk RNA-seq: All RNA from a mixed cell sample is extracted and sequenced en masse, providing an average profile of how many transcripts of each gene are present.
- Single-cell RNA-seq (scRNA-seq): Individual cells are isolated, the RNA from each cell is sequenced, and the transcriptional profile is reconstructed cell by cell, revealing heterogeneity. This approach is much more expensive and complex than bulk RNA-seq.

The sequence fragments ("reads") produced by the most common platforms (Illumina) typically have lengths of 50–150 nucleotides.

1. Indicate in the following cases which technique you would use and why:
  - a. Imagine you need to analyze a heterogeneous tumor sample in which drug-resistant subpopulations are suspected.
  - b. Bacterial colony grown on a plate.
2. You have developed *in vitro* two motor neuron cell lines: one wild-type and the other with a KO of gene F. You first perform a quantitative PCR on two key developmental genes, which we now call J and K, and find them to be downregulated in the KO cells. When you re-do the analysis with scRNA-seq to identify which particular subpopulation downregulates the two genes, you fail to identify any. What could be the explanation for such a phenomenon? Below is the histogram with the percentages of the three subpopulations identified in the scRNA-seq.



### Problem 5

Two genes, A and B, both encoding proteins, are correlated and functionally interact with each other. To investigate this relationship, a transgenic organism is generated in which an additional copy of gene A, complete with its own promoter, has been inserted at a random position in the genome. Transcriptomic analysis confirms a significant increase in messenger RNA levels of A in transgenics compared to controls.

Discuss which molecular and regulatory hypotheses can be formulated in each of the following scenarios observed for gene B:

1. No variation in B RNA levels compared to control.
2. Observed variation in B RNA levels, with the following sub-conditions:
  - a) The increase in B is proportional to the increase in A;

or
  - b) The increase in B is constant and independent of the degree of overexpression of A.
3. B levels do not increase under basal conditions, but increase in response to an environmental stimulus (e.g., high temperature), and in that case, the increase in B is proportional to A levels.

### Problem 6

Two distinct but closely related fish species, which we'll call Species A and Species B, are able to mate under natural conditions and produce viable embryos. However, an interesting asymmetry is observed in the cross results:

- Mating between male A × female B generates embryos that begin to develop but arrest in mid-embryonic development, dying within a few months.
  - Mating between male B × female A, on the other hand, leads to full development and the birth of viable and fertile adult fish.
1. Propose one or more possible molecular or epigenetic mechanisms that could explain this asymmetry.
  2. Suggest one or more experiments that could be useful to test and, if confirmed, validate your hypothesis.

**Ammissione al IV anno - Corso Ordinario, Chimica e Geologia. AA 2025/26**  
*Prova Scritta di Chimica Fisica*  
28/08/2025

**Esercizio 1**

*Dissertazione:* Descrivere, in massimo due pagine, i fondamenti chimico-fisici alla base della spettroscopia di risonanza magnetica nucleare.

**Esercizio 2**

Si consideri un sistema quantistico descritto da un Hamiltoniano del tipo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}',$$

dove  $\mathcal{H}'$  rappresenta la seguente perturbazione

$$\mathcal{H}' = i\lambda[\mathcal{A}, \mathcal{H}_0],$$

dove  $\lambda$  è un parametro reale e  $\mathcal{A}$  un operatore hermitiano. Sia  $\mathcal{B}$  un secondo operatore osservabile, tale che

$$\mathcal{C} = i[\mathcal{B}, \mathcal{A}].$$

Siano  $\langle \mathcal{A} \rangle_0$ ,  $\langle \mathcal{B} \rangle_0$  e  $\langle \mathcal{C} \rangle_0$  i valori di aspettazione degli operatori  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ , calcolati nello stato fondamentale non perturbato (e non degenere). Si determini, al primo ordine in  $\lambda$ , la correzione al valore di aspettazione di  $\mathcal{B}$  nello stato fondamentale perturbato.

Si verifichi il risultato ottenuto applicandolo al seguente sistema tridimensionale:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{n=1}^3 \left( \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2}m_n\omega^2x_n^2 \right),$$

dove  $p$  è il momento,  $m$  la massa,  $\omega$  la frequenza angolare,  $x$  la coordinata e

$$\mathcal{H}' = \lambda x_3.$$

Si calcoli il valore di aspettazione  $\langle x_n \rangle$  per  $n = 1, 2, 3$  al più basso ordine in  $\lambda$ , e si confronti il risultato perturbativo con il valore esatto di  $\langle x_n \rangle$ .

**Esercizio 3**

Un elettrone si trova inizialmente nell'autostato fondamentale ( $n = 1$ ) di una buca di potenziale infinita, estesa nella regione  $-a/2 \leq x \leq a/2$ . Al tempo  $t = 0$  viene applicato un campo elettrico uniforme  $\mathbf{E}$  diretto lungo l'asse  $x$ . Il campo resta attivo per un intervallo di tempo  $\tau$  e viene poi disattivato.

Utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo, determinare le probabilità  $P_2$  e  $P_3$  che, per tempi  $t > \tau$ , l'elettrone si trovi rispettivamente negli autostati  $n = 2$  e  $n = 3$ .

Si assuma che il tempo  $\tau$  sia sufficientemente breve da soddisfare la condizione:

$$\tau \ll \frac{\hbar}{E_1 - E_2}$$

dove  $E_n$  rappresenta l'energia associata all'autostato  $n$ .

**Esercizio 4**

I tre livelli energetici più bassi di una data molecola sono  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = \epsilon$  e  $E_3 = 10\epsilon$ . Dimostrare che a una temperatura  $T^*$  sufficientemente bassa, solo i livelli  $E_1$  ed  $E_2$  sono popolati. Determinare l'espressione di  $T^*$ . Determinare il contributo dei livelli al calore specifico a volume costante  $c_v$ . Rappresentare un grafico indicativo di  $c_v$  in funzione di  $T$ .

**Esercizio 5**

Si consideri un sistema composto da  $N$  oscillatori armonici non interagenti in equilibrio alla temperatura  $T$ . I livelli energetici di un singolo oscillatore sono dati dalla seguente espressione:

$$E_n = \frac{\gamma}{V} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

dove  $\gamma$  è una costante e  $V$  è il volume.

Si determini:

- le espressioni dell'energia interna  $U$  e  $c_v$  in funzione della temperatura;
- l'equazione di stato del sistema;
- la frazione di particelle nel  $n$ -esimo livello.

**Esercizio 6**

Gli stati elettronici di un dato sistema monodimensionale possono essere descritti dal seguente operatore Hamiltoniano:

$$H = \sum_{n=1}^N E_0 |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^N \Omega \left[ |n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \right]$$

dove  $\{|n\rangle\}$  rappresenta una base ortonormale ( $\langle n|n' \rangle = \delta_{nn'}$ ), mentre  $E_0$  e  $\Omega$  sono due costanti. Assumendo le condizioni al contorno  $|n+N\rangle = |n\rangle$ , determinare le autofunzioni e i livelli energetici del sistema.

# Ammissione al IV anno - Corso Ordinario, Chimica e Geologia. AA 2025/26

Prova Scritta di Chimica Fisica- English version

28/08/2025

## Exercise 1

*Short essay:* Describe, in no more than two pages, the physico-chemical foundations of nuclear magnetic resonance spectroscopy.

## Exercise 2

Consider a quantum system described by a Hamiltonian of the form

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}',$$

where  $\mathcal{H}'$  represents the following perturbation:

$$\mathcal{H}' = i\lambda[\mathcal{A}, \mathcal{H}_0],$$

with  $\lambda$  a real parameter and  $\mathcal{A}$  a Hermitian operator. Let  $\mathcal{B}$  be a second observable operator, such that

$$\mathcal{C} = i[\mathcal{B}, \mathcal{A}].$$

Let  $\langle \mathcal{A} \rangle_0$ ,  $\langle \mathcal{B} \rangle_0$ , and  $\langle \mathcal{C} \rangle_0$  be the expectation values of the operators  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , and  $\mathcal{C}$ , calculated in the unperturbed (and non-degenerate) ground state. Determine, to first order in  $\lambda$ , the correction to the expectation value of  $\mathcal{B}$  in the perturbed ground state.

Verify the result by applying it to the following three-dimensional system:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{n=1}^3 \left( \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2}m_n\omega^2x_n^2 \right),$$

where  $p$  is the momentum,  $m$  the mass,  $\omega$  the angular frequency,  $x$  the coordinate, and

$$\mathcal{H}' = \lambda x_3.$$

Compute the expectation value  $\langle x_n \rangle$  for  $n = 1, 2, 3$  to the lowest order in  $\lambda$ , and compare the perturbative result with the exact value of  $\langle x_n \rangle$ .

## Exercise 3

An electron is initially in the ground eigenstate ( $n = 1$ ) of an infinite potential well extending over the region  $-a/2 \leq x \leq a/2$ . At time  $t = 0$ , a uniform electric field  $\mathbf{E}$  directed along the  $x$ -axis is applied. The field remains active for a time interval  $\tau$  and is then turned off.

Using time-dependent perturbation theory, determine the probabilities  $P_2$  and  $P_3$  that, for times  $t > \tau$ , the electron is found in the eigenstates  $n = 2$  and  $n = 3$ , respectively.

Assume that the time  $\tau$  is short enough to satisfy the condition:

$$\tau \ll \frac{\hbar}{E_1 - E_2}$$

where  $E_n$  denotes the energy associated with the eigenstate  $n$ .

#### Exercise 4

The three lowest energy levels of a given molecule are  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = \epsilon$ , and  $E_3 = 10\epsilon$ . Show that at a sufficiently low temperature  $T^*$ , only the levels  $E_1$  and  $E_2$  are populated. Determine the expression for  $T^*$ . Determine the contribution of the levels to the constant-volume specific heat  $c_v$ . Sketch a qualitative graph of  $c_v$  as a function of  $T$ .

#### Exercise 5

Consider a system composed of  $N$  non-interacting harmonic oscillators in equilibrium at temperature  $T$ . The energy levels of a single oscillator are given by the following expression:

$$E_n = \frac{\gamma}{V} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

where  $\gamma$  is a constant and  $V$  is the volume.

Determine:

- the expressions for the internal energy  $U$  and  $c_v$  as functions of temperature;
- the equation of state of the system;
- the fraction of particles in the  $n$ -th level.

#### Exercise 6

The electronic states of a given one-dimensional system can be described by the following Hamiltonian operator:

$$H = \sum_{n=1}^N E_0 |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^N \Omega \left[ |n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \right]$$

where  $\{|n\rangle\}$  is an orthonormal basis ( $\langle n|n' \rangle = \delta_{nn'}$ ), and  $E_0$  and  $\Omega$  are two constants. Assuming the periodic boundary conditions  $|n+N\rangle = |n\rangle$ , determine the eigenfunctions and energy levels of the system.

**Prova di Termodinamica, Meccanica Statistica e Meccanica Quantistica**

**Esercizio 1.** Una particella di massa  $m$  si muove in una dimensione con Hamiltoniana  $H = p^2/(2m) + V(x)$ , dove  $V(x) = \epsilon(\cosh(x/a) - 1)$ , con  $\epsilon > 0$ .

- (i) Sia  $V_0$  l'approssimazione armonica del potenziale attorno al minimo. Si calcoli lo spettro dei livelli energetici di  $H_0 = p^2/(2m) + V_0$  e si scriva una base di autofunzioni di  $H_0$ .
- (ii) Si mostri che l'espansione perturbativa di  $H$ , a partire dal termine imperturbato  $H_0$ , è controllata dal parametro  $\lambda \equiv \hbar/(a\sqrt{m\epsilon})$ .
- (iii) Si calcoli, in teoria delle perturbazioni al primo ordine in  $\lambda$ , la correzione agli autovalori e all'autostato del primo livello eccitato di  $H_0$ .
- (iv) Il sistema si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = cxe^{-\frac{\sqrt{\epsilon m}}{2\hbar a}x^2}$$

dove  $c$  è un coefficiente di normalizzazione. Determinare i valori che si possono ottenere con una misura di  $H$  sullo stato  $|\psi\rangle$  e le corrispondenti probabilità, al primo ordine non nullo in  $\lambda$ .

**Esercizio 2.** Un pione  $\pi^-$  (una particella di spin zero, parità negativa e carica elettrica uguale all'elettrone) è inizialmente legato nello stato di energia coulombiana più bassa a un nucleo di deuterio  $d$ , formato da un protone e un neutrone nello stato di spin  ${}^3S_1$ . Dopo circa  $10^{-12}$  secondi il pione è catturato dal deuterio e vengono prodotti due neutroni  $n$ :



- (i) Quanto valgono il momento angolare orbitale e lo spin totale della coppia di neutroni?
- (ii) Si assuma che lo spin del deuterio sia nella direzione  $\hat{r}$ . Nella reazione (1) qual è la distribuzione angolare della probabilità di emissione di un neutrone con spin in verso opposto a quello dello spin del deuterio?

Per studiare le dimensioni dei pioni si può pensare di realizzare un atomo formato da un  $\pi^+$  ( $m_\pi \sim 280 m_e$ ) e da un muone  $\mu^-$ . Il muone ha le stesse proprietà dell'elettrone ma differisce per la massa. Essendo molto più pesante dell'elettrone ( $m_\mu \sim 200 m_e$ ), agisce come sonda per esplorare la distribuzione di carica del piane.

- (iii) Assumendo  $\mu^-$  puntiforme, la carica del pionne distribuita uniformemente in una sfera di raggio  $R_\pi$  e considerando solo l'interazione coulombiana, si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, il contributo più importante alla variazione della differenza tra le energie dei livelli  $1s$  e  $2p$ , in funzione di  $R_\pi$ . Si consideri che la scala caratteristica di  $R_\pi$  è  $\sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ .

(altri esercizi sul retro)

**Esercizio 3.** Si consideri una buca di potenziale infinita di lunghezza  $L$ . La buca viene riempita con 2 particelle di massa  $m$ , che interagiscono tramite il potenziale

$$V_{int}(x_1, x_2) = V_0 \delta(x_1 - x_2). \quad (2)$$

- (i) Assumendo che la perturbazione indotta dal potenziale sia piccola rispetto alle energie degli autostati della buca, calcolare l'energia del livello fondamentale del sistema a 2 particelle al primo ordine in teoria delle perturbazioni nel caso le due particelle siano: distinguibili, fermioniche, bosoniche.
- (ii) Si ripeta il calcolo dell'esercizio precedente, ma considerando il primo eccitato del sistema a 2 particelle.
- (iii) Si assuma ora che il sistema sia preparato nel livello fondamentale del sistema a due particelle e che un agente esterno inizi a modulare nel tempo il potenziale di interazione in modo tale da rimpiazzare  $V_0$  con

$$V_0(t) = V_0 + V_\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Discutere, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, il lavoro svolto dall'esterno sul sistema nell'intervallo di tempo  $[0, \frac{\pi}{\omega}]$ .

**Esercizio 4.** Si consideri un modello idealizzato di un solido rappresentato da una catena unidimensionale di  $N$  particelle  $x_1, x_2, \dots, x_N$  di massa  $m$  che interagiscono tramite un potenziale armonico a primi vicini, con il vincolo addizionale che l'ordine tra le posizioni delle particelle sia fissato  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ . Il potenziale totale può quindi essere espresso come

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{\kappa}{2} x_1^2 + R(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{\kappa}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + R(x_{i+1} - x_i) \right] \quad (4)$$

dove  $R$  è tale che  $R(z) = \infty$  per  $z \leq 0$  e  $R(z) = 0$  altrimenti. Si assuma che il solido sia in uno stato di equilibrio termico con un ambiente circostante a temperatura  $T$ . Calcolare l'energia libera del modello, la capacità termica e il coefficiente di dilatazione termica lineare, espresso come  $\lambda = \frac{1}{\langle x_N \rangle} \frac{\partial}{\partial T} \langle x_N \rangle$  dove  $\langle \dots \rangle$  denota la media sull'ensemble canonico. Commentare il risultato.

**Esercizio 5.** Una goccia d'acqua sferica (densità  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , tensione superficiale  $\sigma = 0.0728 \text{ N/m}$ ) di raggio  $r_0$  cade verticalmente da un'altezza  $h$  e impatta su una lastra metallica liscia e fredda. L'acqua si espande formando un bordo. Trascurando la viscosità dell'acqua,

- (i) Calcolare il raggio massimo,  $R_{\max}$ , del bordo, e mostrare come dipende da  $h$  e  $r_0$ , fornendo alcuni esempi numerici.
- (ii) Dopo aver raggiunto  $R_{\max}$ , il bordo potrebbe ritrarsi a causa delle forze capillari. Calcolare la scala temporale di ritrazione,  $t_r$ .
- (iii) Se la lastra è raffreddata a una temperatura  $T_s < 273 \text{ K} \equiv T_m$ , sotto il punto di fusione, il bordo potrebbe congelarsi durante la ritrazione. Ricavare la condizione affinché ciò avvenga e discutere il risultato. *Dati utili:*  $L_f = \text{calore latente di fusione} = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$  per l'acqua;  $k = \text{conducibilità termica del ghiaccio} = 2.2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

**Test of Thermodynamics, Statistical Mechanics and Quantum Mechanics**

**Problem 1.** A particle of mass  $m$  moves in one dimension with the Hamiltonian  $H = p^2/(2m) + V(x)$ , where  $V(x) = \epsilon(\cosh(x/a) - 1)$ , with  $\epsilon > 0$ .

- (i) Let  $V_0$  be the harmonic approximation of the potential around its minimum. Calculate the energy level spectrum of  $H_0 = p^2/(2m) + V_0$  and write a basis of its eigenfunctions.
- (ii) Show that the perturbative expansion of  $H$ , with  $H_0$  as the unperturbed term, is controlled by the parameter  $\lambda \equiv \hbar/(a\sqrt{m\epsilon})$ .
- (iii) Using first-order perturbation theory in  $\lambda$ , calculate the correction to the eigenvalue and the eigenstate of the first excited level of  $H_0$ .
- (iv) The system is in the state described by the wave function:

$$\psi(x) = cxe^{-\frac{\sqrt{\epsilon m}}{2\hbar a}x^2}$$

where  $c$  is a normalization coefficient. Determine the possible outcomes of a measurement of  $H$  on the state  $|\psi\rangle$  and their corresponding probabilities, to the first non-vanishing order in  $\lambda$ .

**Problem 2.** A negative pion  $\pi^-$  (a particle with zero spin, negative parity, and electric charge equal to that of an electron) is initially bound in the lowest Coulomb energy state to a deuterium nucleus  $d$ , composed of a proton and a neutron in the  ${}^3S_1$  spin state. After approximately  $10^{-12}$  seconds, the pion is captured by the deuterium, resulting in the production of two neutrons  $n$ :



- (i) What are the orbital angular momentum and total spin of the pair of neutrons?
- (ii) Assume that the spin of the deuterium is aligned along the direction  $\hat{r}$ . In the reaction (??), what is the angular distribution of the probability of emitting a neutron with spin opposite to that of the deuterium?

To study the size of pions, one can consider forming an atom consisting of a  $\pi^+$  ( $m_\pi \sim 280 m_e$ ) and a muon  $\mu^-$ . The muon has the same properties as the electron but differs in mass. Being much heavier than the electron ( $m_\mu \sim 200 m_e$ ), it acts as a probe to explore the charge distribution of the pion.

- (iii) Assuming the  $\mu^-$  is point-like, the pion's charge is uniformly distributed within a sphere of radius  $R_\pi$ , and considering only the Coulomb interaction, calculate, to first order in perturbation theory, the most significant contribution to the variation in the energy difference between the  $1s$  and  $2p$  levels as a function of  $R_\pi$ . Assume that the characteristic scale of  $R_\pi$  is  $\sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ .

**(more problems on the back)**

**Problem 3.** Consider an infinite potential well of length  $L$ , that contains 2 particles of mass  $m$  interacting via the potential

$$V_{int}(x_1, x_2) = V_0\delta(x_1 - x_2). \quad (2)$$

- (i) Assuming the perturbation induced by the interaction potential to be small in respect to the eigenenergies of the potential well, compute the energy of the 2-particles ground state at first order in perturbation theory when the particles are distinguishable, fermions or bosons.
- (ii) Repeat the calculations of point i) for the 2-particles excited state.
- (iii) Assume now that the system is prepared in the 2-particles ground state and an external agent is modulating the potential so that  $V_0$  is replaced with

$$V_0(t) = V_0 + V_\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Discuss, at first order in perturbation theory, the work performed by the external agent in the time interval  $[0, \frac{\pi}{\omega}]$ .

**Problem 4.** In an idealized model of a solid,  $N$  particles of mass  $m$ , with positions identified by the coordinates  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , are arranged in one dimension. Assume that nearest neighbors interact via a harmonic potential, with the additional constraint that the order of the positions of the particles is fixed i.e.  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ . The total potential can be expressed as

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{\kappa}{2}x_1^2 + R(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{\kappa}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + R(x_{i+1} - x_i) \right] \quad (4)$$

where  $R$  is such that  $R(z) = \infty$  for  $z \leq 0$  and  $R(z) = 0$  otherwise. Assume that the solid is in a state of thermal equilibrium with an environment at temperature  $T$ . Compute the free energy of the model, the thermal capacity, and the linear thermal expansion coefficient, defined as  $\lambda = \frac{1}{\langle x_N \rangle} \frac{\partial}{\partial T} \langle x_N \rangle$  where  $\langle \dots \rangle$  denotes an average over the canonical ensemble. Comment the result.

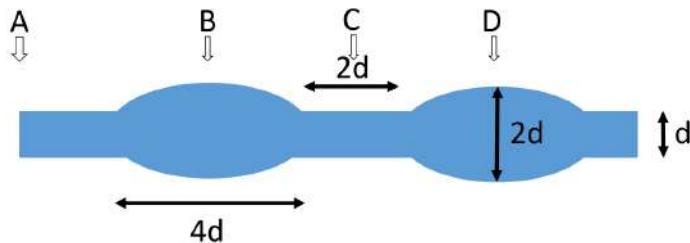
**Problem 5.** A spherical water (density  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , surface tension  $\sigma = 0.0728 \text{ N m}^{-1}$ ) droplet of radius  $r_0$  falls vertically from a height  $h$  and impacts on a cold, smooth metal plate. The water spreads in a rim. Neglecting water viscosity,

1. Calculate the maximal radius,  $R_{\max}$  of the rim, and show how it depends on  $h$  and  $r_0$ , giving some numerical examples.
2. After reaching  $R_{\max}$  the rim might retract as a result of capillary forces. Compute the retraction timescale,  $t_r$ .
3. If the plate is cooled to a temperature  $T_s < 273 \text{ K} \equiv T_m$ , below the melting point, the rim might freeze during retraction. Derive the condition for this to happen. *Useful data:*  $L_f = \text{latent heat of fusion} = 3.34 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$  for water;  $k = \text{thermal conductivity of ice} = 2.2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

## AMMISSIONE AL IV ANNO - NEUROFISIOLOGIA

### Problema 1

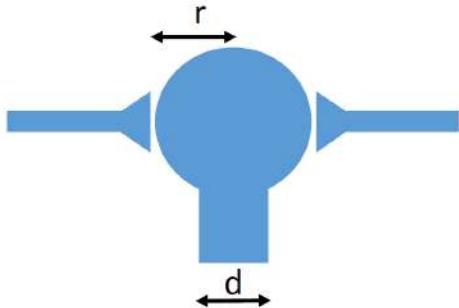
Un assone non mielinizzato ha la seguente forma:



In A si registra un picco di differenza di potenziale  $\Delta V_0$ . Il picco di potenziale si propaga in maniera passiva.  $R_a$  è la resistenza assiale del cavo e  $R_m$  è la resistenza di membrana in A. Si assuma costante la densità dei canali a perdita. Si assume  $\frac{R_m}{R_a} \gg d$ . Calcolare  $\Delta V$  nel momento in cui il picco raggiunge i punti B, C e D.

### Problema 2

Assumiamo che una spina abbia una forma sferica di raggio  $r$  e un collo di diametro  $d < r$ . La resistenza di membrana è  $R_m$  e anche in questo caso la densità dei canali a perdita è costante e  $\frac{R_m}{R_a} \gg d$ . La capacità di membrana è  $C_m$ . La spina riceve due terminali sinaptici identici ognuno dei quali inietta una corrente  $i$  in un tempo  $t = R_m C_m$ .



Se un solo terminale è attivato,

- Calcolare  $\Delta V$  nella spina al picco del potenziale.

- Calcolare  $\Delta V$  nel collo della spina al picco di potenziale
- Come cambia  $\Delta V$  nel collo della spina al picco di potenziale se il diametro diminuisce da  $d$  a  $\frac{d}{2}$  ?

I due terminali vengono ora attivati entrambi con un ritardo  $\delta$ .

- Calcolare  $\Delta V$  al picco del potenziale della prima stimolazione in funzione di  $\delta$
- Calcolare  $\Delta V$  al picco del potenziale della seconda stimolazione in funzione di  $\delta$

### Problema 3

Un potenziale d'azione è caratterizzato dai seguenti parametri

Il potenziale di riposo,  $V_0$

Il potenziale al picco,  $V_{max}$

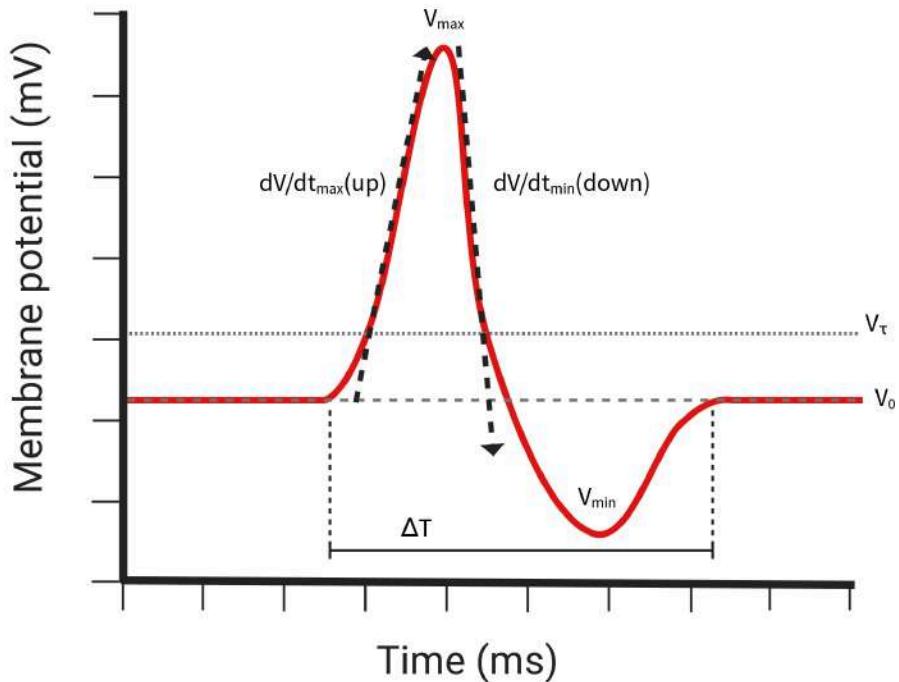
Il potenziale di iperpolarizzazione  $V_{min}$

La velocità massima di depolarizzazione  $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{max}$

La velocità massima di ripolarizzazione  $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{min}$  (ovvero il massimo in modulo durante la ripolarizzazione)

La durata  $\Delta T$

## Action Potential Diagram



Il candidato indichi se e come ognuno dei parametri di cui sopra vari in funzione delle seguenti variabili:

Concentrazione di Potassio extracellulare  $[K^+]_{out}$

Concentrazione di Sodio extracellulare  $[Na^+]_{out}$

Densità dei canali a perdita (*leakage*)

Densità dei canali  $Na^+$  voltaggio-dipendenti

Densità dei canali  $K^+$  voltaggio-dipendenti

Costante cinetica di attivazione dei canali  $Na^+$  voltaggio-dipendenti

Costante cinetica di attivazione dei canali  $K^+$  voltaggio-dipendenti

Costante cinetica di inattivazione dei canali  $Na^+$  voltaggio-dipendenti

Costante cinetica di inattivazione dei canali  $K^+$  voltaggio-dipendenti

Soglia di apertura dei canali  $Na^+$  voltaggio-dipendenti

Soglia di apertura dei canali  $K^+$  voltaggio-dipendenti

Infine, assumendo che il tempo refrattario assoluto per i canali  $Na^+$  voltaggio-dipendenti  $\ll \Delta T$ , il candidato indichi se e come la frequenza massima di scarica è influenzata dalle stesse variabili.

#### **Problema 4**

Un neurofisiologo sta conducendo un esperimento per studiare l'elaborazione dell'informazione visiva nella corteccia visiva primaria (V1) di un topolino anestetizzato. Utilizza un array di microelettrodi (MEA) a 500 punti per registrare l'attività neuronale di singole unità mentre il topolino viene esposto a stimoli visivi (pattern a barre orientate) presentati alternativamente all'occhio destro e all'occhio sinistro.

Basandosi su questa configurazione sperimentale e sulle tue conoscenze della neurofisiologia visiva, rispondi alle seguenti domande, proponendo metodologie di analisi e giustificando i passaggi.

1. Descrivi il processo fondamentale che il ricercatore dovrebbe seguire per isolare e identificare le singole unità neuronali (spikes) dalle registrazioni multielettrodo grezze. Successivamente, come determinerebbe se una data unità risponde (ovvero, è attivata) allo stimolo visivo presentato all'occhio destro o all'occhio sinistro?
2. Una volta identificati i neuroni che rispondono agli stimoli visivi, proponi una metrica quantitativa che il ricercatore potrebbe utilizzare per classificare le risposte come prevalentemente monoculari (solo occhio destro o solo occhio sinistro) o binoculari. Spiega come calcoleresti questa metrica e quali sarebbero i valori attesi per ciascuna categoria.
3. Immagina di aver identificato diversi neuroni binoculari. Quali ulteriori esperimenti (con lo stesso setup di registrazione) il ricercatore potrebbe eseguire per investigare l'integrazione binoculare di questi neuroni, distinguendoli da semplici neuroni che rispondono a entrambi gli occhi ma senza una vera "integrazione"? Quali potrebbero essere i risultati attesi di questi esperimenti che indicherebbero una vera integrazione binoculare?

#### **Problema 5**

Un ricercatore sta studiando l'autoregolazione delle reti neuronali nella corteccia. Per fare ciò, utilizza un sistema di cellule geneticamente modificate per isolare tipi specifici di neuroni: un topo in cui il gene per la GFP (Green Fluorescent Protein) è espresso sotto il controllo del promotore GAD67 (acido glutammico decarbossilasi 67) e il gene per la RFP è espresso sotto il promotore di SLC17A7, noto anche come VGLUT1

(Vesicular Glutamate Transporter 1), permettendo di separare neuroni inibitori (GFP-positivi) ed eccitatori (RFP-positivi) da colture primarie di corteccia murina.

Successivamente, mescola questi neuroni in varie proporzioni e misura l'attività media delle reti formatesi *in vitro* tramite patch-clamp, concentrandosi sui potenziali post-sinaptici evocati. Sorprendentemente, osserva che l'attività dei neuroni non varia linearmente con la proporzione dei neuroni inibitori: le colture con pochi neuroni inibitori non sono così iperattive come ci si aspetterebbe. Misurando le correnti postsinaptiche eccitatorie (EPSC) sia indotte che spontanee, deduce che la rete si sta autoregolando.

Basandosi su queste informazioni e sulle tue conoscenze di neurobiologia, rispondi alle seguenti domande:

1. Spiegare per quale ragione GAD67 marca i neuroni inibitori e vGLUT1 i neuroni eccitatori
2. Considerando che le colture con pochi neuroni inibitori non sono iperattive come previsto, proponi due potenziali meccanismi di autoregolazione che la rete potrebbe mettere in atto per compensare la scarsità di inibizione. Quali specifiche misurazioni con il patch-clamp (oltre ai potenziali post-sinaptici evocati) dovrebbero essere eseguite per supportare o confutare questi meccanismi, e cosa ci si aspetterebbe di osservare?
3. Assumendo che la rete si autoregoli efficacemente per mantenere l'omeostasi, discuti criticamente i limiti di questo modello *in vitro* nel riprodurre l'autoregolazione di una rete corticale *in vivo*. Quali fattori cruciali presenti *in vivo* (e assenti *in vitro*) potrebbero influenzare drasticamente o modulare ulteriormente questi meccanismi di autoregolazione? Suggerisci un esperimento per investigare l'influenza di uno di questi fattori *in vitro*.

## Problema 6

Il sonno ed i ritmi circadiani sono processi quasi ubiquitari negli animali.

Il candidato discuta la differenza tra ritmi circadiani e sonno e faccia l'esempio di un esperimento in cui la manipolazione di un parametro esterno (temperatura, luce, suoni, cibo, esercizio) può influenzare i ritmi circadiani ma non il sonno, ovvero una condizione in cui il la fase del ritmo periferico non è più sincrona con quella del ritmo centrale.

Nei mammiferi, il sonno è assolutamente vitale per la sopravvivenza e la depravazione di sonno per pochi giorni è letale per gli animali sperimentali. Il sonno è un processo omeostatico e la depravazione da sonno induce un debito di sonno che deve essere colmato da un sonno più lungo la notte successiva.

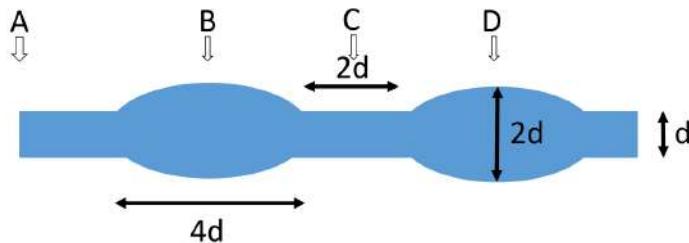
Il candidato ipotizzi uno o più meccanismi che dettano la assoluta necessità del sonno.



## ADMISSION TO IV YEAR - NEUROPHYSIOLOGY

### Problem 1

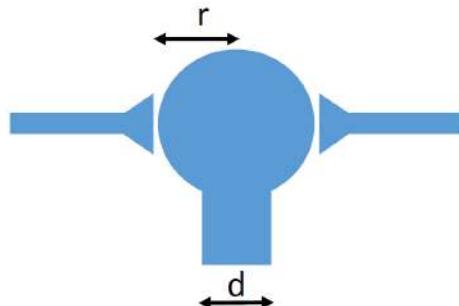
An unmyelinated axon has the following shape:



In A there is a peak of potential difference  $\Delta V_0$ . The peak potential propagates passively.  $R_a$  is the axial resistance of the cable and  $R_m$  is the membrane resistance in A. Assume the density of lossy channels constant. Take  $\frac{R_m}{R_a} \gg d$ . Calculate  $\Delta V$  when the peak reaches points B, C and D.

### Problem 2

Let us assume that a neuron spine has a spherical shape of radius  $r$  and a neck of diameter  $d < r$ . The membrane resistance is  $R_m$  and also in this case the density of the lossy channels is constant and  $\frac{R_m}{R_a} \gg d$ . The membrane capacity is  $C_m$ . The spine receives two identical synaptic terminals, each of which injects a current  $i$  in one time  $t = R_m C_m$ .



If only one terminal is activated,

- Calculate  $\Delta V$  in the spine at the peak of potential.

- Calcolare  $\Delta V$  in the spine neck at the peak of potential.
- How does  $\Delta V$  change in the spine neck at the peak of potential if the diameter decreases from  $d$  to  $\frac{d}{2}$  ?

The two terminals are now both activated with a delay  $\partial$ .

- Calculate  $\Delta V$  at the peak of the potential of the first stimulation as a function of  $\partial$
- Calculate  $\Delta V$  at the peak of the potential of the second stimulation as a function of  $\partial$

### Problem 3

An action potential is characterized by the following parameters:

The rest potential,  $V_0$

The peak potential,  $V_{max}$

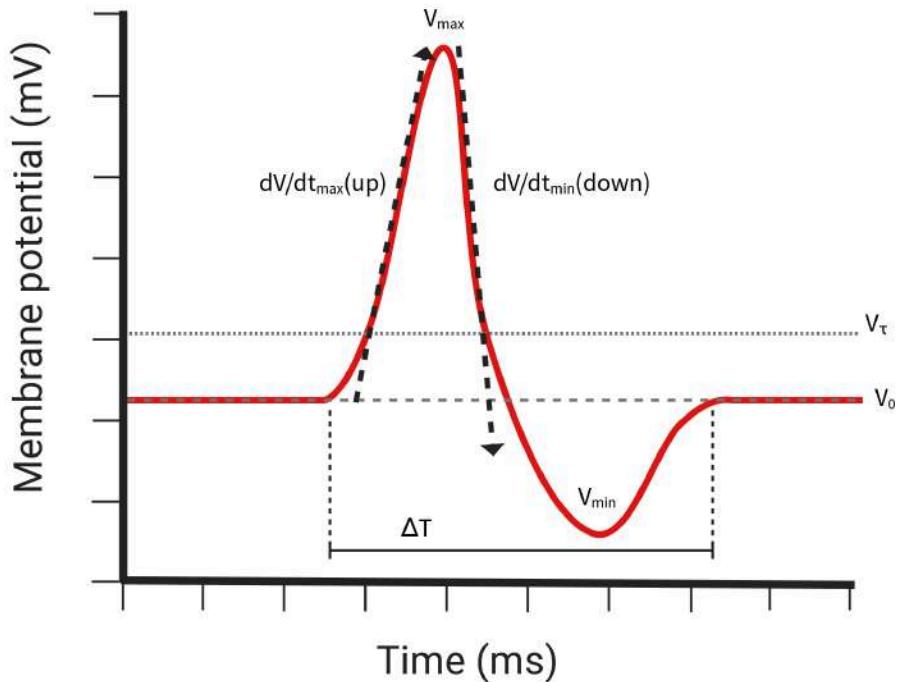
The hyperpolarization potential  $V_{min}$

The maximum depolarization rate  $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{max}$

The maximum repolarization rate  $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{min}$  (i.e. the maximum in modulus during repolarization)

The duration of  $\Delta T$

## Action Potential Diagram



The candidate should indicate if and how each of the above parameters varies according to the following variables:

- Extracellular potassium concentration  $[K^+]_{out}$
- Extracellular sodium concentration  $[Na^+]_{out}$
- Lossy channel density (*leakage*)
- Density of  $Na^+$  voltage-dependent channels
- Density of  $K^+$  voltage-dependent channels
- Activation kinetic constant of  $Na^+$  voltage-dependent channels
- Activation kinetic constant of  $K^+$  voltage-dependent channels
- Inactivation kinetic constant of  $Na^+$  voltage-dependent channels
- Inactivation kinetic constant of  $K^+$  voltage-dependent channels
- $Na^+$  voltage-dependent channels opening threshold
- $K^+$  voltage-dependent channels opening threshold

Finally, assuming that the absolute refractory time for the  $Na^+$  voltage-dependent channels  $\ll \Delta T$ , the candidate indicates if and how the maximum discharge rate is affected by the same variables.

#### Problem 4

A neurophysiologist is conducting an experiment to study visual information processing in the primary visual cortex (V1) of an anesthetized mouse. It uses a 500-point microelectrode array (MEA) to record the neuronal activity of individual units while the mouse is exposed to visual stimuli (oriented bar patterns) presented alternately to the right eye and left eye. Based on this experimental setup and your knowledge of visual neurophysiology, answer the following questions, proposing analysis methodologies and justifying the steps.

1. Describe the fundamental process that the researcher should follow to isolate and identify individual neuronal units (spikes) from raw multielectrode recordings. Next, how would you determine whether a given unit responds (i.e., is activated) to the visual stimulus presented to the right eye or left eye?
2. Once you have identified the neurons that respond to visual stimuli, propose a quantitative metric that the researcher could use to classify responses as predominantly monocular (right eye only or left eye only) or binocular. Explain how you would calculate this metric and what the expected values would be for each category.
3. Imagine that you have identified several binocular neurons. What further experiments (with the same recording setup) could the researcher perform to investigate the binocular integration of these neurons, distinguishing them from simple neurons that respond to both eyes but without true "integration"? What could be the expected results of these experiments that would indicate true binocular integration?

#### Problem 5

A researcher is studying the self-regulation of neuronal networks in the cortex. To do this, it uses a system of genetically modified cells to isolate specific types of neurons: a mouse in which the gene for GFP (Green Fluorescent Protein) is expressed under the control of the promoter GAD67 (glutamic acid decarboxylase 67) and the gene for RFP is expressed under the promoter of SLC17A7, also known as VGLUT1 (Vesicular Glutamate Transporter 1), allowing to separate inhibitory (GFP-positive) and excitatory (RFP-positive) neurons from primary cultures of murine cortex. Next, it mixes these neurons in various proportions and measures the average activity of the networks formed *in vitro* via patch-clamp, focusing on the evoked post-synaptic potentials. Surprisingly, they note that the activity of neurons does not vary linearly with the proportion of inhibitory neurons: cultures with few inhibitory neurons are not as

overactive as one would expect. By measuring both induced and spontaneous excitatory postsynaptic currents (EPSCs), they infer that the network is self-regulating. Based on this information and your knowledge of neurobiology, answer the following questions:

1. Explain why GAD67 marks inhibitory neurons and vGLUT1 excitatory neurons
2. Considering that cultures with few inhibitory neurons are not as overactive as expected, propose two potential self-regulatory mechanisms that the network could put in place to compensate for the scarcity of inhibition. What specific patch-clamp measurements (in addition to evoked post-synaptic potentials) should be performed to support or refute these mechanisms, and what would be expected to be observed?
3. Assuming that the network effectively self-regulates to maintain homeostasis, critically discuss the limitations of this *in vitro* model in reproducing the self-regulation of a cortical network *in vivo*. What crucial factors present *in vivo* (and absent *in vitro*) could drastically influence or further modulate these self-regulatory mechanisms? Suggest an experiment to investigate the influence of one of these factors *in vitro*.

### **Problem 6**

Sleep and circadian rhythms are almost ubiquitous processes in animals.

The candidate should discuss the difference between circadian rhythms and sleep and give the example of an experiment in which the manipulation of an external parameter (temperature, light, sounds, food, exercise) can affect circadian rhythms but not sleep, i.e. a condition in which the phase of the peripheral rhythm is no longer synchronous with that of the central rhythm.

In mammals, sleep is absolutely vital for survival, and sleep deprivation for a few days is lethal for experimental animals. Sleep is a homeostatic process and sleep deprivation induces a sleep debt that must be filled by longer sleep the next night.

The candidate hypothesizes one or more mechanisms that dictate the absolute necessity of sleep.



SCUOLA NORMALE SUPERIORE,  
 CONCORSO DI AMMISSIONE AL QUARTO ANNO DEL CORSO  
 ORDINARIO  
 PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA  
 28 Agosto 2025

**Esercizio 1.** Sia  $G$  un gruppo che contiene un sottogruppo di indice 12 e ha un elemento di ordine 24. Fate vedere che  $G$  non può essere semplice.

**Esercizio 2.** Sia  $p$  un primo dispari,  $k$  un campo di caratteristica  $p$ , e  $t$  un'indeterminata. Sia  $D_p$  il gruppo diedrale di ordine  $2p$ , generato da due elementi  $\sigma$  e  $\tau$ , con le solite relazioni  $\sigma^p = \tau^2 = 1$  e  $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$ . Fate agire  $D_p$  sul campo  $k(t)$  delle funzioni razionali a coefficienti in  $k$ , mediante le regole  $\sigma t = t + 1$  e  $\tau t = -t$ . Trovate il campo degli invarianti  $k(t)^{D_p} \subseteq k(t)$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\Sigma$  una superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$ , senza auto-intersezioni. Dato  $p \in \Sigma$  e un intorno  $U$  di  $p$  in  $\Sigma$ , per  $a > 0$  piccolo e fissato si consideri la superficie

$$U^a = \{q + aN(q) \mid q \in U\},$$

dove  $N(q)$  indica una scelta continua della normale a  $\Sigma$  in  $q$ . È noto che per  $a$  sufficientemente piccolo  $U_a$  è a sua volta una superficie regolare.

Si calcolino la curvatura media e Gaussiana di  $U^a$  in funzione di  $a$  e di quelle di  $U$ .

**Esercizio 4.** Sia  $S$  una superficie compatta e orientata di genere 1, cioè un toro  $S^1 \times S^1$ , e  $D$  un piccolo disco su  $S$  con bordo  $\partial D$  e parte interna  $D$ . Sia  $\mathbb{RP}^2$  lo spazio proiettivo reale e  $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$  una linea; si noti che  $\mathbb{RP}^1$  è omeomorfo ad un cerchio.

Sia  $X$  lo spazio topologico ottenuto incollando  $S \setminus \overset{\circ}{D}$  e  $\mathbb{RP}^2$  lungo  $\partial D$  e  $\mathbb{RP}^1$ , cioè

$$X = ((S \setminus \overset{\circ}{D}) \sqcup \mathbb{RP}^2) / (\partial D \simeq \mathbb{RP}^1).$$

1. Si calcoli il gruppo fondamentale di  $X$ .
2. Mostrare che ogni rivestimento connesso di grado 3 di  $X$  è di Galois, e che questo è falso per i rivestimenti di grado 4.

**Esercizio 5.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a valori in  $\mathbb{C}$  con polinomio minimo  $\prod_i (t - \lambda_i)^{d_i}$ , con  $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ , e  $\lambda_i \neq \lambda_j$  per  $i \neq j$ . Dato un intero  $e \geq 1$ , calcolare il polinomio minimo di  $A^e$ .

Admission to Materials and Nanotechnologies, General Chemistry written exam

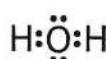
**Exercise 1**

For each of the following compounds:

- a.  $\text{NH}_4^+$  b.  $\text{S}_2\text{O}_8^-$  c.  $\text{BrF}_3$  d.  $\text{SF}_4$  e.  $\text{H}_3\text{BO}_3$  f.  $\text{XeF}_4$  g.  $\text{Al}_2\text{H}_6$  h.  $\text{O}_3$

1. Define the molecular structure (Lewis structure).

*Example:* for a water molecule, the Lewis structure is the following:



2. Determine the molecular geometry according to VSEPR theory and the symmetry point group.

*Example:* for a water molecule, the VSEPR geometry is “angular shape derived from a tetrahedral shape”. The symmetry point group is the  $\text{C}_{2v}$  one.

3. Report the formal charge and the oxidation number of each atom.  
4. State if they have a non-zero electric dipole moment.  
5. State whether they are chiral.

**Exercise 2**

Balance the following redox reactions occurring in aqueous solution (eventually, include species  $\text{H}^+$ ,  $\text{OH}^-$  and  $\text{H}_2\text{O}$ , if needed):

- a.  $\text{Cr}^{3+} + \text{BiO}_3^- \rightarrow \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{Bi}^{3+}$   
b.  $\text{Cl}_2 \rightarrow \text{Cl}^- + \text{ClO}_3^-$   
c.  $\text{BrO}_3^- + \text{H}_2\text{AsO}_3^- \rightarrow \text{Br}^- + \text{H}_2\text{AsO}_4^-$

**Exercise 3**

At 25°C, the standard free energy of formation of gaseous nitric oxide (NO) is 86.55 kJ mol<sup>-1</sup>, while the standard entropies of  $\text{O}_2(\text{g})$ ,  $\text{N}_2(\text{g})$ , and  $\text{NO}(\text{g})$  are 29.355, 20.125, and 29.844 JK<sup>-1</sup> mol<sup>-1</sup>, respectively.

Calculate the standard free energy of formation of gaseous nitric oxide at 110°C.

**Exercise 4**

200 ml of a 1M solution of sodium hypochlorite ( $\text{NaOCl}$ ) was dissolved in a solution buffered to pH 6.20 and in another solution buffered to pH 5.5. Find the ratio  $[\text{OCl}]/[\text{HOCl}]$  in these solutions.

**Exercise 5**

*Dissertation:* Discuss the physical and chemical effects that may affect the chemical equilibrium of a generic reaction, providing some illustrative examples.

# Scuola Normale Superiore

## admission to the fourth year: Materials and Nanotechnology

### written test of Classical Physics, September 2nd 2025

1) A rigid rod of length  $a$  and negligible mass has one end hinged at a point at a height  $a$  from the horizontal plane, around which it can rotate while remaining in a vertical plane. At the other end of the rod and at its center, two point masses of equal mass  $m$  are fixed. On the horizontal plane, exactly below the point around which the rod rotates, there is a point mass of mass  $M$ .

The rod, initially horizontal, is released from rest, rotates under the action of gravity and strikes the mass  $M$ , rebounding backward. Neglecting all friction and assuming the collision is perfectly elastic, determine the ratio  $M/m$  knowing that after the collision, the free end of the rod rises to a height of  $a/4$ .

2) A refrigerator removes heat from its interior and releases it to the outside, operating on a reversible Carnot cycle between the internal temperature  $T_b = 4^\circ\text{C}$  (which it keeps constant) and the external temperature  $T_a$ , with  $T_a > T_b$ , consuming a power  $W$  when on. The insulation of the refrigerator is not perfect, and heat enters from the outside to the inside at a rate given by  $P = \alpha(T_a - T_b)$  with  $\alpha$  constant.

Given that when  $T_a = 24^\circ\text{C}$  the refrigerator maintains the internal temperature  $T_b = 4^\circ\text{C}$  while being on only one quarter of the time, determine the maximum external temperature  $T_M$  at which the refrigerator can still maintain the internal temperature  $T_b = 4^\circ\text{C}$  when it is on all the time.

3) A vertical cylindrical tank with radius  $R = 1\text{ m}$  is initially full of water up to a height  $h = 2\text{ m}$ . The tank is emptied by opening a small hole in its wall near the base, with radius  $r = 1\text{ cm}$ .

Estimate the time interval required for the water level to drop from  $1.10\text{ m}$  to  $1.00\text{ m}$ , and compare it with the time required to drop the water level from  $0.55\text{ m}$  to  $0.50\text{ m}$ .

4) A parallel-plate capacitor consists of two rectangular parallel plates of width  $w$  and length  $L$ , separated by a distance  $d$ , ( $d \ll w, L$ ). A dielectric with relative permittivity  $\epsilon_r$  can be partially inserted between the plates along the length: a portion of length  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ) is occupied by the dielectric  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , while the remaining length  $L - x$  is empty ( $\epsilon = \epsilon_0$ ). Edge effects are neglected, and only the behavior between the parallel plates is considered.

The dielectric is stationary and inserted for a length  $x$  when the capacitor is connected to a generator that applies a constant voltage  $V$ , charging it with charge  $Q$ .

- Derive the expression for the total capacitance  $C(x)$  as a function of  $x$ .
- Derive the expression for the force  $F(x)$  acting on the dielectric. Specify whether this force is repulsive or attractive, favoring or opposing the insertion of the dielectric into the capacitor.
- Numerically calculate  $C(x = 0)$  and  $C(x = L)$  using the following data, and comment on the experimental mechanism for measuring the capacitance, also considering the possible contribution of parasitic effects.  
Data:  $w = 200\text{ mm}$ ,  $L = 0.2\text{ m}$ ,  $d = 1\text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 4$ ,  $V = 100\text{ V}$ ,  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\text{ F/m}$

5) Consider a tube of infinite length and section  $A$ , divided in infinite compartments by semipermeable walls separated by a distance  $l$ . Initially,  $N$  particles of a diatomic gas with molecular mass  $m$  are inserted in one compartment.

The molecules are always in thermal equilibrium with themselves and the walls at a temperature  $T$ . Every time a particle hit a semipermeable wall, it has a probability  $p \ll 1$  to cross it.

Describe how the standard deviation  $\sigma_x$  of the position of the particles changes with time  $t$  when  $\sigma_x(t) \gg l$ .

How can be described the motion of the gas for length scales  $\gg l$ ? How can it be parameterized? How does the parameter(s) change with  $T$ ?

*hint:* try to write continuous equations for the gas concentration.