Scuola Normale Superiore
Ammissione al I anno del corso ordinario
Prova di Matematica

24 agosto 2026

Esercizio 1. Consideriamo un cerchio di centro C e di raggio 1, e su di esso un arco $\widehat{AB}$ sotteso da un angolo $0 < \alpha < \pi$ in radianti. Tracciata la semiretta S tangente al cerchio in A, dallo stesso lato dell'arco, si consideri la semiretta bisettrice S_1 dell'angolo formato dal segmento AB con S, poi per $n \geq 1$ la semiretta bisettrice S_{n+1} dell'angolo formato da S_n e S. Sia poi B_1 l'intersezione di S_1 con la perpendicolare a AB in B e per $n \geq 1$ sia B_{n+1} l'intersezione di S_{n+1} con la perpendicolare a S_n in B_n. Si mostri che al crescere di n il rapporto tra le lunghezze di AB_n e α si avvicina sempre più a 1.

Esercizio 2. Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 1, m \geq 1$. Si dimostri che le seguenti asserzioni sono equivalenti.

a):
$$\max_{x \in [0,1]} |\cos(2\pi n x) - \cos(2\pi m x)| = 2.$$

b): esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che 2^p divide n ma 2^p non divide m, oppure viceversa scambiando n, m.

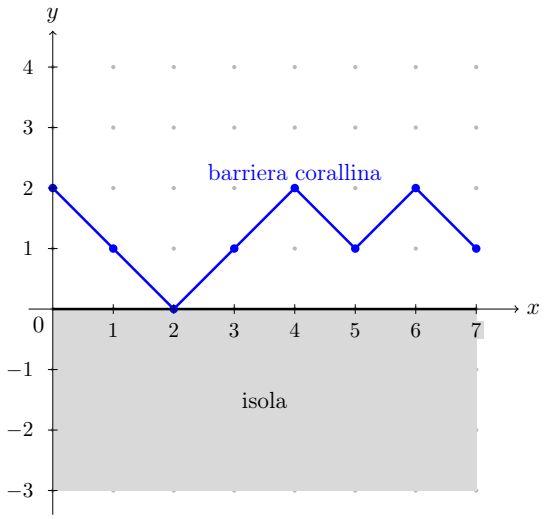
Esercizio 3. Fissiamo un triangolo equilatero ABC di lato unitario nel piano, e un numero reale $1 < L < 2$. Posto un punto P nel lato AB, ci muoviamo in senso antiorario lungo il perimetro di ABC per una lunghezza L, e chiamiamo Q il punto di arrivo. Consideriamo il poligono R racchiuso dal tratto di perimetro percorso e dal segmento PQ. Per quali posizioni di P, Q tale poligono R ha area massima? Per quali ha area minima?

Esercizio 4. Sia $n \geq 1$ un numero intero fissato. Nel piano cartesiano di coordinate (x, y), chiamiamo "lato nord dell'isola" l'insieme di punti di coordinate $(x, 0)$ con $x \in [0, n]$ e "lato nord dell'oceano" l'insieme di punti di coordinate (x, y), con $x \in [0, n]$ ed $y \geq 0$. Chiamiamo "barriera corallina nel lato nord" una curva continua $y = f(x)$ definita per $x \in [0, n]$, col grafico contenuto nel lato nord dell'oceano, che nei punti x a coordinate intere assume valori interi, che in ogni intervallo $(k, k+1)$ con $k = 0, \ldots, n-1$ è lineare con pendenza ± 1; richiediamo inoltre che la barriera corallina sia "ancorata all'isola", cioè con il valore minimo della funzione f uguale a zero.

a: Si calcoli il numero D_n di possibili diverse barriere coralline. Se non si riesce a ottenere un numero preciso, si mostri per lo meno che esistono $a > 0, b > 1$ tali che $D_n \geq ab^n$ per ogni $n \geq 2$.

b: Sia $C_2(n)$ il numero di barriere coralline che hanno massima distanza dalla costa minore o uguale a 2.

Si dimostri che
$$C_2(n) = \begin{cases} a_0 \cdot b_0^n - 2, & n \text{ pari}, \\ a_1 \cdot b_1^n - 2, & n \text{ dispari} \end{cases}$$
per opportune costanti reali a_0, b_0, a_1, b_1, da determinare esplicitamente.



Esercizio 5. **a:** Si mostri che il prodotto di tre numeri naturali consecutivi non nulli non è mai un cubo perfetto.

b: Vale lo stesso enunciato per prodotti $n(n+k)(n+2k)$ con n e k naturali non nulli?

Esercizio 6. Nel piano cartesiano di coordinate (x, y) consideriamo i punti

$$A_1 = (1, 0) \ , \ A_2 = (-1, 0) \ , \ O = (0, 0) \quad .$$

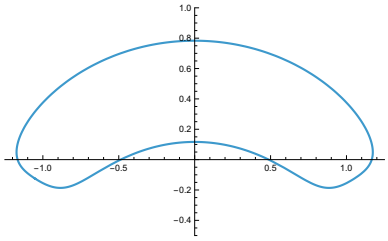
Il teorema della curva di Jordan afferma che una curva chiusa senza autointersezioni nel piano divide il piano in due parti, una parte interna (limitata) e una parte esterna (illimitata).

Scopo dell'esercizio è trovare un polinomio $p(x, y)$ a coefficienti reali il cui luogo di zeri

$$Z = \{(x, y) : p(x, y) = 0\}$$

è una singola curva chiusa senza autointersezioni nel piano tale che i punti A_1, A_2 sono all'interno della curva, mentre l'origine O è all'esterno della curva.

In questo disegno vediamo una curva parametrica che racchiude A_1, A_2 ma non O, ma che non è luogo di zero di un polinomio, e potrebbe essere molto diversa da quella trovata dal candidato



Scuola Normale Superiore
Admission to first year
Mathematical Test

August 24, 2026

Exercise 1. Consider a circle with center C and radius 1, and an arc $\widehat{AB}$ on it subtending an angle $0 < \alpha < \pi$ in radians. Draw the ray S tangent to the circle at A, on the same side of the arc. Let S_1 be the angle-bisector ray of the angle formed by the segment AB and S, and, for $n \geq 1$, let S_{n+1} be the angle-bisector ray of the angle formed by S_n and S. Let B_1 be the intersection of S_1 with the line through B perpendicular to AB, and, for $n \geq 1$, let B_{n+1} be the intersection of S_{n+1} with the line through B_n perpendicular to S_n. Show that, as n tends to infinity, the ratio of the length AB_n to α tends to 1.

Exercise 2. Let $n, m \in \mathbb{Z}$ with $n \geq 1, m \geq 1$. Show that the following statements are equivalent.

a):

$$\max_{x \in [0,1]} |\cos(2\pi n x) - \cos(2\pi m x)| = 2.$$

b): there exists $p \in \mathbb{N}$ such that 2^p divides n but 2^p does not divide m, or vice versa exchanging n, m.

Exercise 3. Consider an equilateral triangle ABC with side length 1, and a real number $1 < L < 2$. Choose a point P on the side AB, move counterclockwise along the perimeter of ABC for a length L, and denote the final point by Q. Let R be the polygon enclosed by the traversed portion of the perimeter and the segment PQ. For which positions of P, Q does R have maximum area? For which positions does it have minimum area?

Exercise 4. Let $n \geq 1$ be a fixed positive integer. In the Cartesian plane with coordinates (x, y), call "north side of the island" the set of points with coordinates $(x, 0)$ with $x \in [0, n]$ and "north side of the ocean" the set of points with coordinates (x, y), with $x \in [0, n]$ and $y \geq 0$. Call a continuous curve $y = f(x)$ a "coral reef on the north side" if it is defined for $x \in [0, n]$, its graph is contained in the north side of the ocean, it takes integer values at integer values of x, and on every interval $(k, k+1)$ with $k = 0, \ldots, n-1$ it is linear with slope ± 1. We also require that the coral reef be "anchored to the island", namely that the minimum value of the function f be zero.

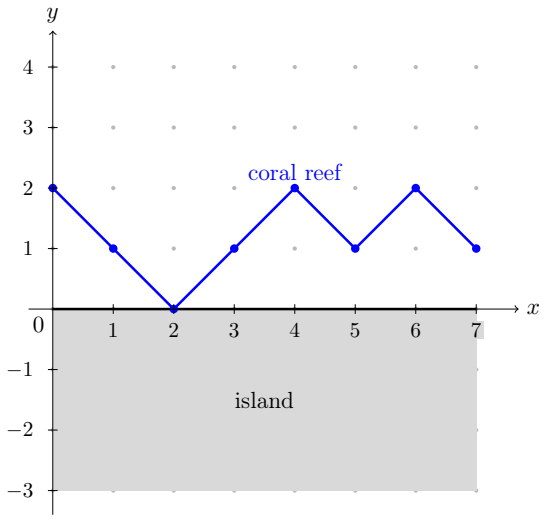
a: Compute the number D_n of all possible distinct coral reefs. In case you are unable to obtain a precise number, show that there exist $a > 0, b > 1$ such that $D_n \geq ab^n$ for every $n \geq 2$.

b: Let $C_2(n)$ be the number of coral reefs whose maximum distance from the coast is less than or equal to 2.

Show that

$$C_2(n) = \begin{cases} a_0 \cdot b_0^n - 2, & n \text{ even}, \\ a_1 \cdot b_1^n - 2, & n \text{ odd} \end{cases}$$

for suitable real constants a_0, b_0, a_1, b_1, to be determined explicitly.



Exercise 5. **a:** Show that the product of three consecutive non-zero natural numbers is never a perfect cube.

b: Does the same statement hold for products of the form $n(n+k)(n+2k)$ with n and k non-zero natural numbers?

Exercise 6. In the Cartesian plane with coordinates (x, y), consider the points

$$A_1 = (1, 0) \ , \ A_2 = (-1, 0) \ , \ O = (0, 0) \quad .$$

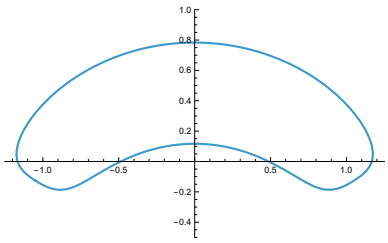
The Jordan curve theorem asserts that any closed planar curve without self-intersections divides the plane into two parts, a (bounded) interior and an (unbounded) exterior.

The goal of the exercise is to find a polynomial $p(x, y)$ with real coefficients whose zero set

$$Z = \{(x, y) : p(x, y) = 0\}$$

is a single simple closed curve in the plane such that the points A_1, A_2 are in the interior of the curve, while the origin O is in the exterior of the curve.

In this figure, we see a parametric curve that encloses A_1, A_2 but not O, yet it is not the zero set of a polynomial, and it could be very different from the one found by the candidate.



Scuola Normale Superiore, ammissione al I anno del Corso Ordinario

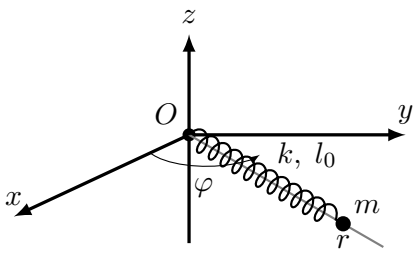
Prova di Fisica - 25 Agosto 2026

Esercizio 1. Si consideri un circuito formato da un generatore ideale di corrente continua I_o e da una resistenza R. La resistenza dipende dalla propria temperatura T secondo la legge

$$R(T) = \frac{R_o}{2}\left[1 + \left(\frac{T}{T_o}\right)^2\right],$$

dove T_o è la temperatura dell'aria circostante supposta costante e R_o il valore della resistenza a $T = T_o$. Si discuta cosa accade in seguito all'accensione del generatore e si determini in particolare se sia possibile raggiungere un regime stazionario in cui la temperatura della resistenza sia stabilmente costante. Si suggerisce di corredare lo svolgimento con opportuni grafici schematici. Si discuta infine brevemente quale sarebbe la differenza piú significativa nel comportamento del circuito se il generatore di corrente non fosse ideale.

Esercizio 2. Si consideri un'asta lunghissima priva di massa, vincolata a ruotare senza attrito nel piano orizzontale xy attorno all'asse z passante per una delle sue estremità posta nell'origine. Una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 ha un estremo fissato nell'origine e l'altro collegato a una massa puntiforme m, la quale è vincolata a scorrere senza attrito lungo l'asta. Le coordinate polari r e φ descrivono la posizione della massa.



1. Se la massa descrive un moto circolare uniforme con velocità angolare ω_0, determinare il raggio r_0 dell'orbita e la condizione di esistenza del moto.

2. Se il moto circolare viene perturbato, la posizione radiale oscilla attorno a r_0. Posto $q = r - r_0$, determinare la pulsazione $\omega_r = 2\pi f_r$ delle piccole oscillazioni, con $|q| \ll r_0$. Si ricorda che la pulsazione di una massa m collegata a una molla di costante elastica k è $\omega_k = \sqrt{k/m}$.

3. Determinare il valore limite massimo della pulsazione delle piccole oscillazioni e confrontarlo con ω_k.

4. Al tempo $t = 0$ siano note la posizione radiale r_1, la velocità radiale v_1 e la velocità angolare ω_1. Determinare l'equazione le cui radici forniscono i valori estremi $r_{\min}$ e $r_{\max}$ del moto radiale successivo.

Esercizio 3. Un recipiente termicamente isolato contiene un fluido di massa M, calore specifico C. Nel fluido sono immerse N particelle puntiformi non interagenti, di masse m_1, m_2, …, m_N. Le particelle non subiscono urti reciproci e, oltre alla forza gravitazionale esterna, sono soggette a una forza esterna uniforme $\vec{F}$, inclinata di un angolo θ rispetto alla verticale, nonché a una forza viscosa proporzionale alla velocità dovuta all'interazione con il fluido, $\vec{F}_v = -k\vec{v}$, dove k è la costante di

attrito viscoso. All'istante iniziale tutte le particelle sono ferme. Si assuma che tutta l'energia dissipata per effetto dell'attrito viscoso venga trasformata in calore e ceduta al fluido. Dopo un tempo sufficientemente grande, si determini la rapidità con cui aumenta la temperatura del fluido. Supponendo fissato N ed il valore totale della massa delle particelle $M_p = \sum_{i=1}^{N} m_i$, si determini inoltre la distribuzione delle masse $\{m_i\}$ che minimizza e quella che massimizza la potenza dissipata nel fluido.

Esercizio 4. Una stella lontana mostra, nello spettro rilevato da uno spettrografo a terra, alcune righe riconoscibili, prodotte dagli strati esterni della stella. In laboratorio le stesse righe sono molto più strette. Si misura:

Riga	λ_0 in laboratorio (nm)	intervallo osservato (nm)
1 (Fe I)	440.475	440.525 –440.615
2 (Fe I)	441.512	440.550 –440.650

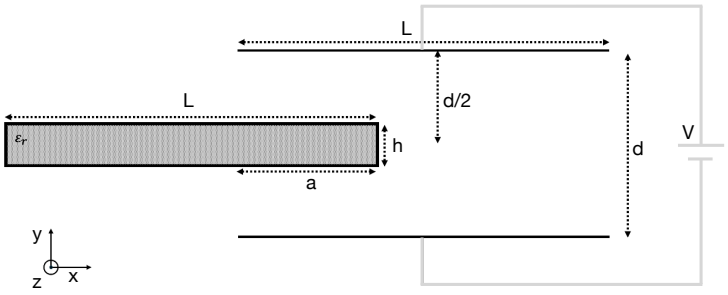
Il contributo alla larghezza di riga dovuto a effetti strumentali dello spettrografo è circa 0.005 nm. La stella non è risolta: lo spettro osservato è prodotto dalla somma della luce proveniente da tutte le parti visibili della sua superficie. Che cosa si può dedurre sul moto della stella, nell'ipotesi che questo sia l'unica causa delle variazioni osservate nelle righe?

I calcoli numerici richiesti devono essere svolti a mano. Come valore della velocità della luce nel vuoto si usi $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Esercizio 5. Un condensatore piano è formato da due armature quadrate di lato L, disposte parallelamente al piano xz, distanti d (con $d \ll L$). Una lastra dielettrica omogenea di costante dielettrica relativa ε_r, quadrata di lato L e spessore h (con $h \ll d$), può scorrere senza attrito tra le armature lungo l'asse x, mantenendosi equidistante e parallela alle stesse.

Si considerino i due casi seguenti:

1. Il condensatore viene collegato a una batteria ideale che mantiene costante la differenza di potenziale V. La lastra viene inserita nel condensatore come in figura e mantenuta ferma da una forza esterna. Si calcoli tale forza al variare della lunghezza inserita a.



2. Il condensatore, inizialmente privo della lastra dielettrica, viene collegato a una batteria ideale e caricato alla differenza di potenziale V. Successivamente viene scollegato dalla batteria. La lastra viene inserita nel condensatore come in figura e, in tale configurazione, viene lasciata libera. Si calcoli la forza elettrostatica che agisce sulla lastra.

Si confrontino i due casi e si discutano le principali differenze fisiche.

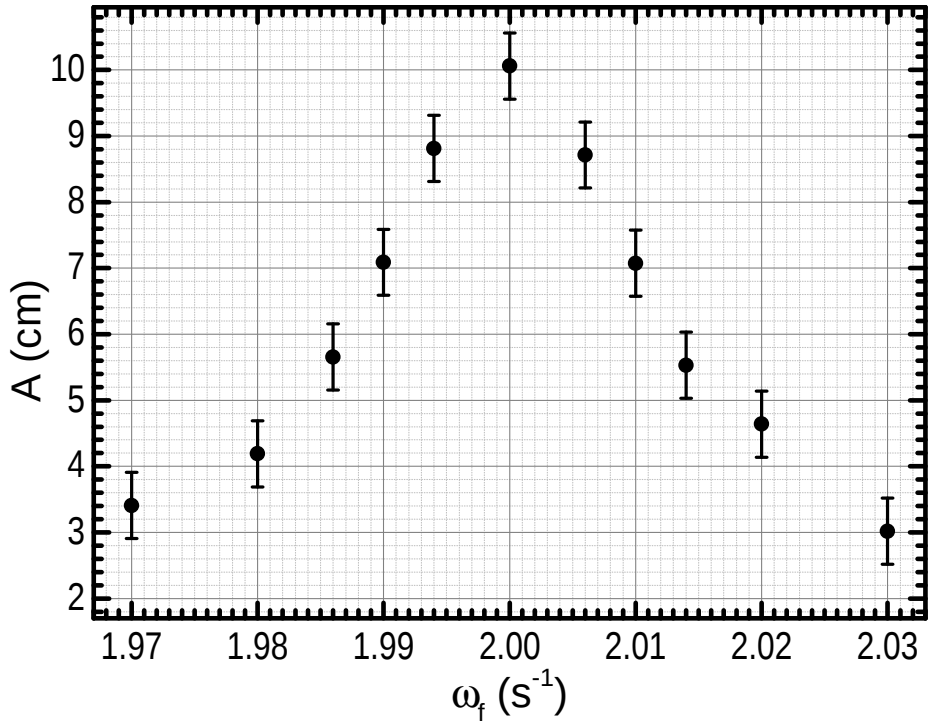
Esercizio 6. Un oscillatore meccanico (ad esempio un corpo di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k) lasciato libero di muoversi compie delle oscillazioni che a causa della presenza di deboli forze dissipative (ad esempio l'attrito dell'aria) risultano lentamente smorzate. Lo stesso oscillatore se soggetto all'azione di una forza oscillante di frequenza ω_f ($\vec{F}_F(t) = \vec{F}_f \sin \omega_f t$), dopo

un tempo abbastanza lungo compie delle oscillazioni con semiampiezza costante $A(\omega_f)$. Nel caso in cui le forze di attrito possano essere considerate proporzionali alla velocità $\vec{v}$ del corpo in movimento ($\vec{F}_a = -b\vec{v}$), vale:

$$A(\omega_f) = \frac{|\vec{F}_f|}{\sqrt{b^2{\omega_f}^2 + (k - m{\omega_f}^2)^2}} .$$

Soggetto alla stessa forza di attrito, il moto di un corpo libero di massa m avrà il modulo della sua velocità v che decadrà esponenzialmente, $v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$.

Considerare ora un oggetto di massa $m = 1.00\,\mathrm{kg}$ (da trattare come un punto materiale) che può muoversi su una guida rettilinea ben oliata, per cui l'attrito statico può considerarsi pari a zero e quello dinamico proporzionale alla sua velocità (la forza di attrito F_a è uguale a $-bv$, dove v è la velocità dell'oggetto). Tale oggetto è attaccato ad una molla ideale di lunghezza a riposo $l = 1.00$ m e costante elastica $k = 4.00\,\mathrm{N/m}$ (dati con incertezza trascurabile); l'altro capo della molla è attaccato ad un punto oscillante la cui posizione varia con legge oraria $X_0 \sin \omega_f t$ (t è il tempo in secondi, X_0 è una lunghezza costante con incertezza trascurabile, e l'incertezza su ω_f è trascurabile). Dopo un tempo sufficientemente lungo, l'oggetto viene visto oscillare armonicamente con semiampiezza costante pari a $A(\omega_f)$, funzione di ω_f, come nel grafico sotto riportato.



Durante quest'ultimo moto per $\omega_f = 2.017\,\mathrm{s}^{-1}$, mentre la molla si sta estendendo e l'oggetto si trova nel punto di equilibrio a riposo della molla (a distanza l dal valor medio della posizione dell'altro capo della molla), l'oggetto si stacca e prosegue il suo moto.

1. Controllare se il grafico è compatibile con i dati del problema
2. Calcolare la costante b e la distanza d dal punto di distacco a cui l'oggetto si fermerà.
3. Stimare l'incertezza sulle grandezze calcolate nel punto precedente (o almeno fornire un metodo per calcolarle).

I risultati non devono essere calcolati con una precisione migliore della loro incertezza, e devono essere usate tutte le approssimazioni che si possono intuire dal grafico fornito. Con queste considerazioni (ed al limite con le approssimazioni $\sqrt{2} \approx 1.5$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$) non dovrebbe esserci bisogno di una calcolatrice per eseguire i calcoli; altrimenti, basta descrivere il metodo per raggiungere il risultato, senza svolgere i calcoli finali.

Scuola Normale Superiore, First-Year Undergraduate Admissions Examination

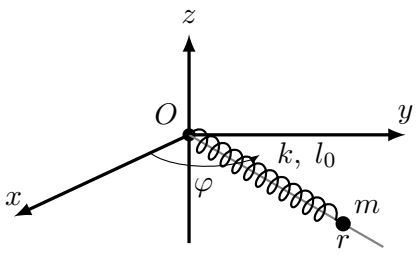
Physics Examination – 25 August 2026

Problem 1. Consider a circuit consisting of an ideal direct-current generator I_o and a resistor R. The resistance depends on its own temperature T according to the law

$$R(T) = \frac{R_o}{2}\left[1 + \left(\frac{T}{T_o}\right)^2\right] \quad ,$$

where T_o is the temperature of the surrounding air, assumed constant, and R_o is the value of the resistance at $T = T_o$. Discuss what happens after the generator is switched on and determine, in particular, whether it is possible to reach a steady state in which the temperature of the resistor is stably constant. It is suggested that the solution be accompanied by suitable schematic graphs. Finally, briefly discuss what the most significant difference in the circuit behavior would be if the current generator were not ideal.

Problem 2. Consider a very long massless rod constrained to rotate without friction in the horizontal xy plane about the z-axis passing through one of its ends, which is located at the origin. An ideal spring of stiffness k and rest length l_0 has one end fixed at the origin and the other attached to a point mass m, which is constrained to slide without friction along the rod. The polar coordinates r and φ describe the position of the mass.



1. If the mass undergoes uniform circular motion with angular velocity ω_0, determine the radius r_0 of the orbit and the condition for the motion to exist.

2. If the circular motion is perturbed, the radial position oscillates about r_0. Letting $q = r - r_0$, determine the angular frequency $\omega_r = 2\pi f_r$ of the small oscillations, with $|q| \ll r_0$. Recall that the angular frequency of a mass m attached to a spring of stiffness k is $\omega_k = \sqrt{k/m}$.

3. Determine the maximum limiting value of the angular frequency of the small oscillations and compare it with ω_k.

4. At time $t = 0$, let the radial position r_1, radial velocity v_1, and angular velocity ω_1 be known. Determine the equation whose roots give the extreme values $r_{\min}$ and $r_{\max}$ of the subsequent radial motion.

Problem 3. A thermally insulated container holds a fluid of mass M and specific heat capacity C. Immersed in the fluid are N non-interacting point-like particles with masses $m_1, m_2, \ldots, m_N$. The particles do not collide with one another and, in addition to the external gravitational field, are subject to a uniform external force $\vec{F}$, directed at an angle θ with respect to the vertical. They also experience a viscous drag force proportional to the velocity arising from their interaction with

the fluid, $\vec{F}_v = -k\vec{v}$, where k is the viscous friction coefficient. Initially, all the particles are at rest. Assume that all the energy dissipated by viscous friction is converted into heat and transferred to the fluid. Determine the instantaneous increase in the temperature of the fluid after a sufficiently long time t. Furthermore, assuming that N and the total mass of the particles, $M_p = \sum_{i=1}^{N} m_i$, are fixed, determine the mass distribution $\{m_i\}$ that minimizes and the one that maximizes the energy dissipation in the fluid.

Problem 4. A distant star shows, in the spectrum detected by a ground-based spectrograph, a number of recognisable lines produced by the star's outer layers. In the laboratory, these same lines are much narrower. The following measurements are taken:

Line	λ_0 in the lab (nm)	observed interval (nm)
1 (Fe I)	440.475	440.525 –440.615
2 (Fe I)	441.512	440.550 –440.650

The contribution to the line width due to instrumental effects of the spectrograph is approximately 0.005 nm.

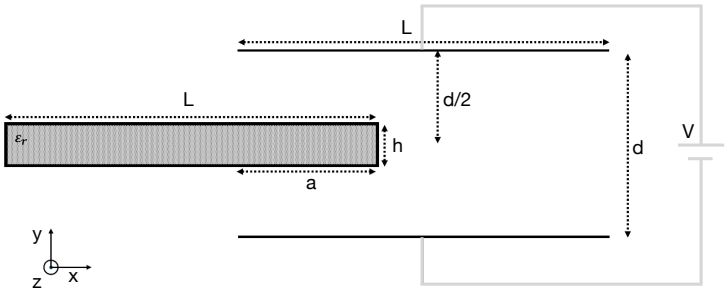
The star is not resolved: the observed spectrum is produced by the sum of the light coming from all visible parts of its surface. What can be inferred about the star's motion, assuming that this is the sole cause of the observed variations in the spectral lines?

All required numerical calculations must be performed by hand. Use $c = 3.00 \times 10^8$ m/s for the speed of light in vacuum.

Problem 5. A parallel-plate capacitor is made of two square plates of side length L, oriented parallel to the xz plane and separated by a distance d (with $d \ll L$). A homogeneous dielectric slab with relative permittivity ε_r, having a square base of side length L and thickness h (with $h \ll d$), can slide without friction between the plates along the x axis, while remaining equidistant from and parallel to them.

Consider the following two cases:

1. The capacitor is connected to an ideal battery that keeps the potential difference V constant. The slab is inserted into the capacitor as shown in the figure and held fixed by an external force. Compute this force as a function of the inserted length a.



2. The capacitor, initially without the dielectric slab, is connected to an ideal battery and charged to the potential difference V. It is then disconnected from the battery. The slab is inserted into the capacitor as shown in the figure and, in this configuration, is left free to move. Compute the electrostatic force acting on the slab.

Compare the two cases and discuss the main physical differences.

Problem 6. A mechanical oscillator (e.g. a body of mass m attached to a spring with spring constant k), when left free to move, performs oscillations that are slowly damped because of weak

dissipative forces (for example, air resistance). The same oscillator, when subjected to an oscillating force of angular frequency ω_f ($\vec{F}_F(t) = \vec{F}_f \sin \omega_f t$), oscillates with constant semi-amplitude $A(\omega_f)$ after a sufficiently long time. If the frictional force can be considered proportional to the velocity $\vec{v}$ of the moving body ($\vec{F}_a = -b\vec{v}$), then

$$A(\omega_f) = \frac{|\vec{F}_f|}{\sqrt{b^2 {\omega_f}^2 + (k - m{\omega_f}^2)^2}} ,$$

For a free body of mass m subject to the same frictional force, the magnitude of its velocity decays exponentially according to

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right).$$

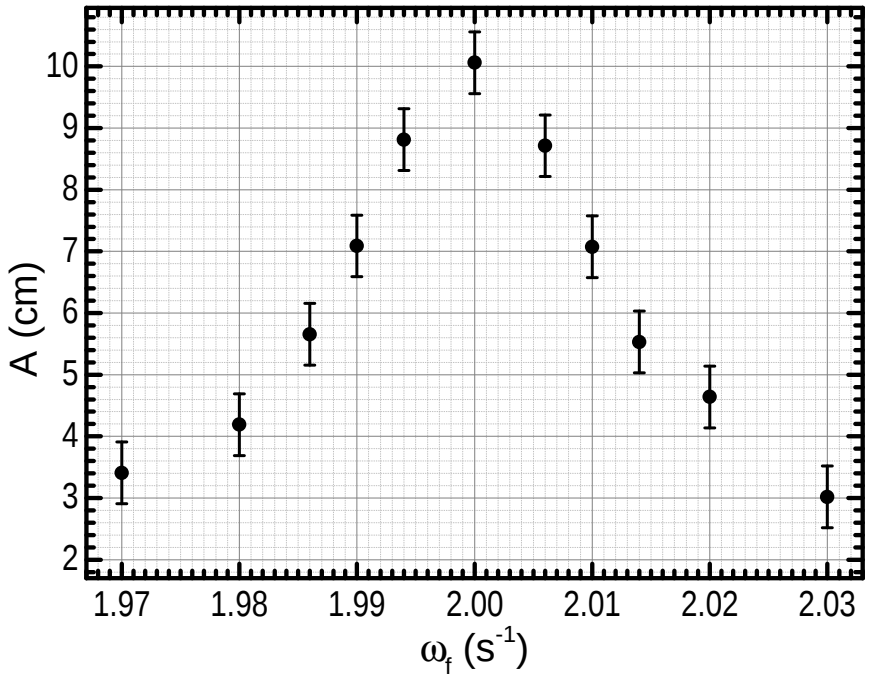
Now consider an object of mass $m = 1.00\,\mathrm{kg}$ (to be treated as a point particle), which can move along a well-lubricated straight guide, so that static friction may be neglected while dynamic friction is proportional to its velocity (the frictional force is $F_a = -bv$, where v is the object's velocity).

The object is attached to an ideal spring with natural length $l = 1.00\,\mathrm{m}$ and spring constant $k = 4.00\,\mathrm{N/m}$ (the uncertainties on these quantities are negligible). The other end of the spring is attached to an oscillating support whose position varies according to

$$X_0 \sin \omega_f t,$$

where t is the time in seconds, X_0 is a constant length with negligible uncertainty, and the uncertainty on ω_f may also be neglected.

After a sufficiently long time, the object is observed to oscillate harmonically with constant semi-amplitude $A(\omega_f)$ as a function of ω_f, as shown in the figure below.



During this steady-state motion for $\omega_f = 2.017\,\mathrm{s}^{-1}$, while the spring is elongating and the object is passing through the spring's natural equilibrium position (that is, at a distance l from the mean position of the oscillating support), the object detaches from the spring and continues its motion.

1. Verify whether the graph is consistent with the data given in the problem.

2. Determine the constant b and the distance d from the detachment point at which the object comes to rest.

3. Estimate the uncertainty on the quantities calculated in the previous point (or at least describe a method for evaluating them).

The numerical results should not be calculated with a precision exceeding their uncertainty, and every approximation suggested by the graph should be exploited. With these considerations (and, if useful, using the approximations $\sqrt{2} \approx 1.5$ and $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$), a calculator should not be necessary. Otherwise, it is sufficient to describe the procedures required to obtain the results, without carrying out the final numerical calculations.

Scuola Normale Superiore, ammissione al I anno del corso ordinario

Prova di Biologia per Biologi – 26 Agosto 2026

Esercizio 1. In una famiglia è presente una malattia neuromuscolare caratterizzata da debolezza muscolare, intolleranza allo sforzo e alterazioni della fosforilazione ossidativa.

Si osserva il seguente pedigree:

I-1: maschio sano I-2: femmina affetta

I loro figli sono:

II-1: maschio affetto; II-2: femmina affetta; II-3: maschio affetto; II-4: femmina affetta.

II-1, maschio affetto, ha tre figli con una donna sana: III-1: maschio sano III-2: femmina sana III-3: femmina sana

II-2, femmina affetta, ha quattro figli con un uomo sano: III-4: maschio affetto III-5: femmina affetta III-6: maschio affetto III-7: femmina affetta

Rispondere ai seguenti quesiti.

A. Indicare se il carattere può essere autosomico dominante, autosomico recessivo o legato al cromosoma X. Motivare la risposta sulla base della distribuzione dei fenotipi nella famiglia.

B. Calcolare la proporzione di figli affetti nati da madri affette e padri affetti.

Confrontare i risultati ottenuti e spiegare perché il carattere sembra trasmesso attraverso la linea femminile

C. Proporre il tipo di ereditarietà più probabile e spiegare quale genoma contiene il gene responsabile. Discutere inoltre perché, in questo tipo di malattia, membri diversi della stessa famiglia potrebbero mostrare gravità clinica diversa pur avendo ereditato la stessa mutazione.

(altri esercizi sul retro)

Esercizio 2. Si dispone di un plasmide circolare, chiamato pX, la cui sequenza completa non è nota. Si sa però che il plasmide contiene una origine di replicazione batterica, necessaria per il mantenimento del plasmide dopo trasformazione in E. coli.

Il plasmide pX può essere tagliato da quattro enzimi di restrizione: EcoRI, BamHI, HindIII e PstI.

Ciascun enzima taglia il plasmide una sola volta, in una posizione diversa. Le posizioni relative dei siti di restrizione sul plasmide sono note e sono disposte nell'ordine seguente lungo la molecola circolare di DNA:

EcoRI — BamHI — HindIII — PstI — EcoRI

Si eseguono digestione doppie con coppie di enzimi, si isolano i frammenti a lunghezza maggiore ottenuti, si richiudono mediante DNA ligasi e si usano i prodotti di ligazione per trasformare batteri competenti. Dopo selezione, si osserva se compaiono colonie batteriche trasformate.

I risultati sono i seguenti:

Frammento isolato e religato	Colonie dopo trasformazione
EcoRI–BamHI	sì
BamHI–HindIII	sì
HindIII–PstI	no
PstI–EcoRI	sì

Rispondere ai seguenti quesiti.

A. Spiegare perché un plasmide deve contenere un'origine di replicazione per dare origine a colonie batteriche dopo trasformazione.

B. Interpretare i risultati sperimentali riportati nella tabella. Quale frammento è privo dell'origine di replicazione? Motivare la risposta.

C. Disegnare una mappa circolare del plasmide indicando l'ordine dei siti di restrizione e la regione in cui deve trovarsi l'origine di replicazione. Spiegare inoltre perché il semplice ingresso del DNA nella cellula batterica non è sufficiente a produrre colonie trasformate.

(altri esercizi sulla seconda pagina)

Esercizio 3. Per seguire il destino di una proteina appena sintetizzata, le cellule vengono esposte per un breve periodo a un amminoacido marcato radioattivamente, che viene incorporato solo nelle nuove proteine (“pulse”). Successivamente l'amminoacido marcato viene sostituito con amminoacidi normali (“chase”). In questo modo è possibile misurare nel tempo la quantità delle proteine prodotte durante il breve periodo iniziale. Una proteina viene studiata con questo metodo.

“Pulse”

Tempo di marcatura (min)	0	5	10	15	20
Proteina marcata (unità arbitrarie)	0	20	40	60	80

Dopo una marcatura di 20 minuti, le cellule vengono trasferite in un terreno contenente solo amminoacidi non marcati. La quantità di proteina marcata viene quindi misurata nel tempo.

“Chase”

Tempo dopo la marcatura (min)	0	20	40	60	80
Proteina marcata (unità arbitrarie)	80	40	20	10	5

Rispondere ai seguenti quesiti.

A. Spiegare perché durante la marcatura (“pulse”) la quantità della proteina aumenta, mentre durante l'allontanamento dell'aminoacido radioattivo (“chase”) diminuisce.

B. Calcolare: la velocità media di aumento della proteina durante il “pulse” (unità arbitrarie al minuto); la velocità media di diminuzione della proteina durante il “chase”.

C. Un'altra proteina viene analizzata con lo stesso esperimento. Durante il “pulse” viene prodotta con la stessa velocità della proteina precedente, ma durante il “chase” la sua quantità marcata rimane quasi costante. Quale delle due proteine è più stabile? Quale sarebbe più adatta a regolare rapidamente la risposta della cellula a uno stimolo? Motivare la risposta. Spiegare perché, per una proteina regolatrice, può essere vantaggioso avere un'elevata velocità di sintesi e una breve emivita.

(altri esercizi sul retro)

Esercizio 4. Gli enzimi di restrizione riconoscono specifiche sequenze di 4–8 basi del DNA. Il riconoscimento non avviene leggendo direttamente le basi, ma attraverso le proprietà chimiche esposte nel solco maggiore della doppia elica. Ogni coppia di basi presenta infatti una particolare disposizione di gruppi chimici (donatori e accettori di legami a idrogeno e gruppi metilici), che costituisce una sorta di codice di riconoscimento. Le proteine possono leggere questo codice formando numerosi legami deboli con il DNA.

Rispondere ai seguenti quesiti.

A. Perché gli enzimi di restrizione possono distinguere una specifica sequenza di DNA senza separare i due filamenti della doppia elica?

B. Il riconoscimento della sequenza avviene grazie a molti legami a idrogeno e altre interazioni deboli tra l'enzima e il DNA. Spiegare perché numerose interazioni deboli permettono un riconoscimento molto più specifico rispetto a poche interazioni forti.

C. La tabella mostra i gruppi chimici coinvolti in legami deboli sulle coppie di basi del DNA:

Coppia di basi	Pattern nel solco maggiore
A·T	A D A M
T·A	M A D A
G·C	A A D H
C·G	H D A A

(dove A = accettore di legame idrogeno, D = donatore di legame idrogeno, M = gruppo metile, H = idrogeno non polare).

Un enzima riconosce il pattern

A D A M – A A D H – M A D A

Quale sequenza di DNA riconosce?

Esercizio 5. Due neuroni sensoriali A e B trasmettono entrambi impulsi della stessa ampiezza. Il neurone A scarica a 10 Hz (10 potenziali di azione al secondo) , il neurone B a 80 Hz (80 potenziali di azione al secondo).

Rispondere ai seguenti quesiti.

A. Quale dei due neuroni sta probabilmente rispondendo allo stimolo più intenso?

B. Il sistema nervoso utilizza la frequenza degli impulsi o la loro ampiezza per rappresentare l'intensità di uno stimolo? Perché?

C. Un soggetto riferisce che un suono diventa progressivamente più forte, ma a un certo punto, nonostante l'intensità percepita aumenti, né la frequenza di scarica nè l'ampiezza dei potenziali di azione di singoli neuroni registrati aumenta oltre un certo valore. Come può il sistema nervoso continuare a rappresentare intensità sempre maggiori?

(altri esercizi sulla terza pagina)

Esercizio 6. La memoria può essere studiata attraverso il comportamento.

Si distinguono due forme di memoria.

- Memoria dichiarativa: permette di riconoscere persone, oggetti, luoghi o eventi già incontrati. Sperimentalmente, è possibile valutarla verificando se un animale distingue un oggetto già visto da uno nuovo.
- Memoria procedurale: permette di acquisire e conservare abilità motorie attraverso l'esercizio. Sperimentalmente, è possibile valutarla misurando se un animale migliora progressivamente l'esecuzione di un compito motorio ripetuto.

Per studiare una nuova mutazione genetica vengono eseguiti due test su topi.

Test 1 – Riconoscimento di un oggetto: il primo giorno il topo esplora due oggetti identici. Il giorno successivo uno dei due viene sostituito con un oggetto nuovo. Si misura il tempo trascorso a esplorare ciascun oggetto.

Test 2 – Cilindro rotante (Rotarod): il topo viene posto ogni giorno su un cilindro in rotazione. Si misura il tempo prima che perda l'equilibrio e cada.

I risultati sono riportati nella tabella.

Test	Topi controllo	Topi mutanti
Riconoscimento dell'oggetto	Esplorano soprattutto l'oggetto nuovo	Esplorano i due oggetti per lo stesso tempo
Rotarod	Il tempo prima della caduta aumenta con i giorni di prova	Il tempo prima della caduta aumenta con i giorni di prova

Rispondere ai seguenti quesiti.

A. Per ciascuno dei due test, indicare quale forma di memoria viene valutata e motivare la risposta.

B. Interpretare i risultati ottenuti nei topi mutanti. Quale tipo di memoria risulta alterato? Quale invece sembra conservato?

C. Un secondo ceppo di topi mutanti mostra il risultato opposto: riconosce normalmente l'oggetto nuovo, ma non migliora nel test del cilindro rotante.

1. Quale forma di memoria è probabilmente compromessa in questo secondo ceppo?
2. Che cosa suggeriscono questi risultati sull'organizzazione della memoria nel sistema nervoso?

Scuola Normale Superiore, admission to the I year of the “corso ordinario”

Exam for Biologists – August 26, 2026

Exercise 1. A family has a neuromuscular disorder characterized by muscle weakness, exercise intolerance, and abnormalities in oxidative phosphorylation.

The following pedigree is shown:

I-1: healthy male I-2: affected female

Their children are:

II-1: affected male; II-2: affected female; II-3: affected male; II-4: affected female.

II-1, an affected male, has three children with a healthy woman: III-1: healthy male III-2: healthy female III-3: healthy female

II-2, an affected female, has four children with a healthy man: III-4: affected male III-5: affected female III-6: affected male III-7: affected female

Answer the following questions.

A. Indicate whether the trait can be autosomal dominant, autosomal recessive, or X-linked. Justify your answer based on the distribution of phenotypes in the family.

B. Calculate the proportion of affected children born to affected mothers and affected fathers.

Compare the results obtained and explain why the trait appears to be transmitted through the female line.

C. Suggest the most likely pattern of inheritance and explain which genome contains the responsible gene. Also discuss why, in this type of disease, different members of the same family might exhibit varying clinical severity despite having inherited the same mutation.

(more exercises on the back)

Exercise 2. Consider a circular plasmid, called pX, whose complete sequence is unknown. However, it is known that the plasmid contains a bacterial replication origin, which is necessary for the plasmid's maintenance after transformation into E. coli.

The pX plasmid can be digested by four restriction enzymes: EcoRI, BamHI, HindIII, and PstI.

Each enzyme cuts the plasmid only once, at a different position. The relative positions of the restriction sites on the plasmid are known and are arranged in the following order along the circular DNA molecule:

EcoRI — BamHI — HindIII — PstI — EcoRI

Double digests are performed using pairs of enzymes; the resulting longer fragments are isolated, ligated using DNA ligase, and the ligation products are used to transform competent bacteria. After selection, the presence of transformed bacterial colonies is observed.

The results are as follows:

Isolated fragment that has been re-ligated	Colonies obtained
EcoRI–BamHI	yes
BamHI–HindIII	yes
HindIII–PstI	no
PstI–EcoRI	yes

Answer the following questions.

A. Explain why a plasmid must contain a replication origin in order to give rise to bacterial colonies after transformation.

B. Interpret the experimental results shown in the table. Which fragment lacks the replication origin? Justify your answer.

C. Draw a circular map of the plasmid, indicating the order of the restriction sites and the region where the replication origin must be located. Also explain why the mere introduction of DNA into the bacterial cell is not sufficient to produce transformed colonies.

(more exercises on the second page)

Exercise 3. To track the fate of a newly synthesized protein, cells are exposed for a short period to a radioactively labeled amino acid, which is incorporated only into new proteins (“pulse”). Subsequently, the labeled amino acid is replaced with normal amino acids (“chase”). This makes it possible to measure, over time, the amount of protein produced during the brief initial period. A protein is studied using this method.

“Pulse”

Pulse time (min)	0	5	10	15	20
Labeled protein (arbitrary units)	0	20	40	60	80

After 20 minutes of labeling, the cells are transferred to a medium containing only unlabeled amino acids. The amount of labeled protein is then measured over time.

“Chase”

Time after “pulse” (min)	0	20	40	60	80
Labeled protein (arbitrary units)	80	40	20	10	5

Answer the following questions.

A. Explain why the amount of protein increases during the labeling (“pulse”) phase, while it decreases during the removal of the radioactive amino acid (“chase”) phase.

B. Calculate: the average rate of increase in protein during the “pulse” (arbitrary units per minute); the average rate of decrease in protein during the “chase.”

C. Another protein is analyzed using the same experiment. During the “pulse,” it is produced at the same rate as the previous protein, but during the “chase,” its labeled amount remains nearly constant. Which of the two proteins is more stable? Which would be better suited to rapidly regulate the cell’s response to a stimulus? Justify your answer. Explain why, for a regulatory protein, it can be advantageous to have a high synthesis rate and a short half-life.

(more exercises on the back)

Exercise 4. Restriction enzymes recognize specific DNA sequences consisting of 4–8 bases. This recognition does not occur by directly reading the bases, but rather through the chemical properties exposed in the major groove of the double helix. Each base pair, in fact, has a particular arrangement of chemical groups (hydrogen-bond donors and acceptors, and methyl groups), which constitutes a sort of recognition code. Proteins can read this code by forming numerous weak bonds with the DNA.

Answer the following questions.

A. Why can restriction enzymes distinguish a specific DNA sequence without separating the two strands of the double helix?

B. Sequence recognition occurs through many hydrogen bonds and other weak interactions between the enzyme and the DNA. Explain why numerous weak interactions allow for much more specific recognition than a few strong interactions.

C. The table shows the chemical groups involved in weak bonds on DNA base pairs:

Pair of bases	Patterns in the major groove
A·T	A D A M
T·A	M A D A
G·C	A A D H
C·G	H D A A

(where A = hydrogen-bond acceptor, D = hydrogen-bond donor, M = methyl group, H = nonpolar hydrogen).

An enzyme recognizes the pattern:

A D A M – A A D H – M A D A

Which DNA sequence does it recognize?

Exercise 5. Two sensory neurons, A and B, both transmit impulses of the same amplitude. Neuron A fires at 10 Hz (10 action potentials per second), and neuron B at 80 Hz (80 action potentials per second).

Answer the following questions.

A. Which of the two neurons is most likely responding to the more intense stimulus?

B. Does the nervous system use the frequency of the impulses or their amplitude to represent the intensity of a stimulus? Why?

C. A subject reports that a sound becomes progressively louder, but at a certain point, even though the perceived intensity increases, neither the firing rate nor the amplitude of the action potentials of the individual recorded neurons increases beyond a certain value. How can the nervous system continue to represent ever-increasing intensities?

(more exercises on the third page)

Exercise 6. Memory can be studied through behavior.

There are two types of memory.

• Declarative memory: allows us to recognize people, objects, places, or events we have encountered before. Experimentally, it can be assessed by determining whether an animal can distinguish an object it has seen before from a new one.

• Procedural memory: enables the acquisition and retention of motor skills through practice. Experimentally, it can be assessed by measuring whether an animal progressively improves its performance on a repeated motor task.

To study a new genetic mutation, two tests are conducted on mice.

Test 1 – Object recognition: On the first day, the mouse explores two identical objects. The next day, one of the two is replaced with a new object. The time spent exploring each object is measured.

Test 2 – Rotating cylinder (Rotarod): Each day, the mouse is placed on a rotating cylinder. The time until it loses its balance and falls is measured.

The results are shown in the table.

Test	Control mice	Mutant mice
Object Recognition	They mainly explore the new object	They explore the two objects for the same amount of time
Rotarod	The time before the fall increases with the number of test days	The time before the fall increases with the number of test days

Answer the following questions.

A. For each of the two tests, identify which form of memory is being assessed and explain your answer.

B. Interpret the results obtained in the mutant mice. Which type of memory appears to be impaired? Which, on the other hand, seems to be intact?

C. A second strain of mutant mice shows the opposite result: they recognize the novel object normally but do not show improvement in the rotating cylinder test.

1. Which form of memory is likely impaired in this second strain?
2. What do these results suggest about the organization of memory in the nervous system?

Ammissione al I anno - Corso Ordinario, Chimica e Geologia. AA 2026/2027

Prova Scritta di Chimica, 26 agosto 2026

Esercizio 1

Date le seguenti formule minime:

C_2Br_2	$GeCl_4$	$TeBr_4$	K_2O	CH_2O_2
$SnCl_2$	NOCl	B_2H_6	H_2C_3	IO_2^-

Disegnare per ogni caso la formula di struttura di Lewis e determinarne la geometria spaziale. In caso possano esistere forme isomeriche, disegnarle esplicitamente. Inoltre indicare:

a. L'ibridazione dell'atomo centrale.

b. Se la struttura è chirale e se esistano elementi di simmetria.

c. Se la molecola è polare. In tal caso, la direzione del momento di dipolo.

Esercizio 2

Una massa di 1.50 g di sodio metallico viene fatta reagire completamente con 1.00 L di acqua secondo la seguente reazione, da bilanciare:

$$Na(s) + H_2O(l) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq) + H_2(g)$$

a. Bilanciare la reazione chimica.

b. Calcolare il numero di moli di sodio.

c. Calcolare il numero di moli di acqua inizialmente presenti, assumendo che la densità dell'acqua sia pari a 1.0 $g \cdot mL^{-1}$.

d. Individuare il reagente limitante e il reagente in eccesso, motivando la risposta mediante un calcolo stechiometrico.

e. Determinare il numero di moli degli ioni Na^+ e OH^- presenti nella soluzione finale.

f. Calcolare la concentrazione molare degli ioni Na^+ e OH^-, assumendo che il volume finale della soluzione sia pari a 1.00 L.

g. Determinare il numero di moli di idrogeno gassoso, H_2, sviluppate durante la reazione e calcolarne il volume misurato a 25 gradi centrigradi e alla pressione di 1 atm.

h. La soluzione ottenuta al termine della reazione viene successivamente diluita con acqua fino a raggiungere un volume complessivo di 2.00 L.

Calcolare:

(a) la nuova concentrazione degli ioni Na^+;

(b) la nuova concentrazione degli ioni OH^-;

(c) il pOH della soluzione;

(d) il pH della soluzione alla temperatura di 25 gradi centigradi.

Esercizio 3

Si consideri la seguente reazione:

$H_2CO \rightleftharpoons CO + H_2$

(a) Valutare se, in condizioni standard, la reazione avviene spontaneamente sapendo che:
$\Delta_f H^0(H_2CO)$ = -108.6 kJ mol^{-1}, $S^0(H_2CO)$ = 219.0 J K^{-1} mol^{-1};
$\Delta_f H^0(CO)$ = -110.5 kJ mol^{-1}, $S^0(CO)$ = 197.7 J K^{-1} mol^{-1};
$S^0(H_2)$ = 130.7 J K^{-1} mol^{-1}.

(b) Determinare la costante di equilibrio della reazione in condizioni standard.

(c) 2 atm di formaldeide (H_2CO) sono introdotte alla temperatura di 900 K in un recipiente del volume di 7.6 L munito di pistone mobile. Durante il corso della reazione il pistone si muove mantenendo la pressione costante. Calcolare le pressioni parziali della miscela gassosa all'equilibrio (assumendo che la constante di equilibrio non dipende dalla pressione).

(d) Il valore della costante cinetica di reazione è 1.60×10^{-51} s^{-1} e 5.00×10^{-42} s^{-1} rispettivamente alla temperatura di 25°C e 77°C. Determinare l'energia di attivazione della reazione.

Esercizio 4

Una soluzione acquosa di acido ipocloroso, HClO, ha volume pari a 75.0 mL e concentrazione 0.265 M.

Per l'acido ipocloroso, $K_a = 3.0 \times 10^{-8}$.

Alla soluzione vengono successivamente aggiunti 30.0 mL di una soluzione di idrossido di potassio, KOH, avente concentrazione 0.6625 M.

Assumere che:

- i volumi delle due soluzioni siano additivi;
- la temperatura sia pari a 25 gradi centigradi;
- l'idrossido di potassio sia completamente dissociato;
- $K_w = 1.0 \times 10^{-14}$.

a. Scrivere e bilanciare l'equilibrio di ionizzazione dell'acido ipocloroso in acqua.

b. Calcolare la concentrazione degli ioni H_3O^+ nella soluzione iniziale, assumendo che la quantità di acido ionizzata sia trascurabile rispetto alla concentrazione iniziale dell'acido.

c. Calcolare il pH iniziale della soluzione di HClO.

d. Calcolare il numero di moli iniziali di acido ipocloroso.

e. Calcolare il numero di moli di KOH aggiunte alla soluzione e confrontarle con le moli iniziali di HClO.

f. Scrivere la reazione di neutralizzazione tra HClO e gli ioni OH^-.

g. Stabilire se, al termine della neutralizzazione, rimangono quantità in eccesso di HClO o di OH^-, oppure se viene raggiunto il punto equivalente.

h. Determinare il numero di moli di ione ipoclorito, ClO^-, presenti al termine della neutralizzazione.

i. Calcolare il volume complessivo della soluzione e la concentrazione dello ione ClO^-.

j. Scrivere l'equilibrio di idrolisi basica dello ione ipoclorito.

k. Calcolare la costante basica (K_b) dello ione ipoclorito.

l. Calcolare la concentrazione degli ioni OH^- prodotti dall'idrolisi, assumendo che la quantità di ClO^- idrolizzata sia trascurabile rispetto alla sua concentrazione iniziale.

m. Calcolare il pOH e il pH della soluzione al termine dell'aggiunta di KOH.

n. Calcolare la variazione di pH determinata dall'aggiunta della soluzione di KOH.

Esercizio 5

Si bilancino le seguenti reazioni redox completando con eventuali specie mancanti (reagenti e/o prodotti):

(a) $NO_3^- + P_4 \rightarrow H_3PO_4$ (in soluzione acida).

(b) $As_2O_3 + MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+} + H_3AsO_4$ (in soluzione acida).

(c) $C_6H_{12}O_6 + SO_4^{2-} + KMnO_4 \rightarrow CO_2 + MnSO_4 + K_2SO_4$ (in soluzione acida).

Esercizio 6

Dissertazione (max due pagine): *Descrivere la struttura elettronica dell'ammoniaca, mettendola in relazione con la polarità, le proprietà intermolecolari, il comportamento acido/base e la reattività.*

Scuola Normale Superiore, ammissione al I anno del Corso Ordinario

Prova integrata di Matematica e Fisica – 27 Agosto 2026

Prova di Matematica

Esercizio 1. Siano $a_1, \dots, a_n, b$ numeri interi positivi tali che il prodotto $a_1 \cdots a_n$ sia divisibile per b. Si dimostri allora che anche il prodotto

$$\mathrm{MCD}(a_1, b) \cdots \mathrm{MCD}(a_n, b)$$

è divisibile per b.

Esercizio 2. Sia $p(x, y)$ un polinomio a coefficienti reali.

(1) Se
$$p\big(s, \log s\big) = 0 \qquad \text{per ogni numero reale } s \text{ maggiore o uguale di } 1$$
si dimostri che p è identicamente nullo.

(2) Se
$$p\big(s, \cos s\big) = 0 \qquad \text{per ogni numero reale } s$$
si dimostri che p è identicamente nullo.

Esercizio 3. Una popolazione, di N individui, è colpita da un virus. Indichiamo con S_n il numero di coloro che il giorno $n = 0, 1, 2, \dots$ non hanno ancora contratto la malattia; supponiamo $S_0 = N$, e supponiamo che ogni giorno una frazione α_n della popolazione contragga il virus, così che la regola sia
$$S_n - S_{n-1} = -\alpha_n S_{n-1} \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$
(non si dia peso al fatto che i numeri S_n potrebbero non essere interi). La frazione α_n è aleatoria, indipendente di giorno in giorno, e può assumere solamente il valore $a \in (0, 1)$ con probabilità p, oppure il valore 0 con probabilità $1 - p$, dove $p \in (0, 1)$ è un numero dato.

Si calcoli la probabilità che valga $S_n = N\,(1 - a)^k$, per $n = 1, 2, \dots$, e $k = 0, 1, \dots, n$. Si calcoli inoltre il valore medio della grandezza S_n.

Prova di Fisica

Esercizio 4. Per spiegare la rifrazione atmosferica risulta utile un modello semplificato in cui l'indice di rifrazione dell'aria decresce linearmente con l'altezza, a partire da una certa quota di riferimento ($z = 0$), da un valore n_0 di poco superiore a 1 ($n_0 = 1 + \Delta n$, con $\Delta n < 10^{-3}$) fino a ridursi a $n = 1$ dopo uno spessore H, ovvero:

$$n(z) = n_0 \qquad z < 0$$

$$n(z) = n_0 - \frac{n_0 - 1}{H} z \qquad 0 < z < H$$

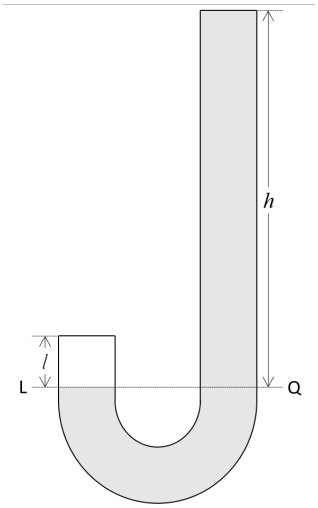
$$n(z) = 1 \qquad z > H$$

1. Determinare le condizioni affinché un raggio di luce che arriva dalla regione $z < 0$ con un angolo α_0 piccolo rispetto al piano (x, y) subisca riflessione totale e riemerga propagandosi verso le z negative.

2. Stimare la lunghezza totale del cammino percorso nella regione a indice variabile ($0 < z < H$).

3. Discutere come la qualità di un'immagine riflessa in questo modo differisca rispetto al caso di uno specchio ideale parallelo al piano (x, y) posto alla quota $z = 0$.

Esercizio 5. Un tubo di sezione A è piegato a forma di J, come in figura (considerare le parti sopra ai livelli L e Q come cilindri regolari verticali, e $h > 2l$), ed è riempito in parte con un liquido ideale di densità ρ (parte scura), in parte da un gas da considerarsi perfetto e biatomico (parte bianca). La condizione iniziale è all'equilibrio, con il gas che occupa un volume $V_0 = Al$ ed ha una pressione P_0. Il tutto è immerso in un campo gravitazionale con accelerazione g rivolta verso il basso, e la temperatura iniziale del sistema è T_0.



Si devono sempre considerare le variazioni di temperatura del liquido e la sua tensione di vapore come trascurabili, e la densità del gas trascurabile rispetto a quella del liquido.

1. Calcolare la pressione nel punto Q e nel punto più alto del tubo; determinare le condizioni per cui quella descritta sia una posizione di equilibrio possibile.

Considerando ρ e h piccoli abbastanza, a partire dalla condizione sopra descritta calcolare la pressione al livello Q e a quello più alto del tubo (e confrontarle con quelle di partenza) dopo che il gas viene fatto passare nella parte destra del tubo in queste due condizioni:

2. il sistema viene fatto nuovamente termalizzare alla temperatura T_0;
3. il sistema si muove unicamente sotto l'azione della forza di gravità (ad esempio, le parti superiori sinistra e destra del tubo vengono collegate da un tubicino di volume trascurabile, e viene lasciato passare solo il gas attraverso esso, chiudendolo appena potrebbe iniziare a scorrerci il liquido).

Esercizio 6. Due cubi omogenei di masse m_1 e m_2, con $m_2 > m_1$, sono posti a contatto su un piano inclinato di angolo $\theta = 30°$. Il cubo di massa m_1 si trova più in basso lungo il piano. Il coefficiente di attrito statico tra ciascun cubo e il piano è $\mu_s = 0.5$, mentre il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = \frac{\mu_s}{2}$. Una forza esterna F, parallela al piano e diretta verso monte, è applicata al cubo m_1, mantenendo i due cubi in equilibrio.

1. Determinare il valore minimo della forza F necessario a mantenere il sistema in equilibrio.
2. Determinare la forza che il blocco m_1 esercita sul blocco m_2 in tale condizione.
3. Determinare la risultante delle forze agenti sul blocco m_1 e commentare il risultato.
4. A un certo istante la forza F viene rimossa. Determinare la velocità dei due blocchi dopo 1 s.

Scuola Normale Superiore, First-Year Undergraduate Admissions Examination

Mathematics and Physics Examination
27 August 2026

Mathematics

Problem 1. Let $a_1, \dots, a_n$ and b be positive integer numbers such that the product $a_1 \cdots a_n$ is divisible by b. Then, show that also the product (where GCD stands for Greatest Common Divisor)

$$\mathrm{GCD}(a_1, b) \cdots \mathrm{GCD}(a_n, b)$$

is divisible by b.

Problem 2. Let $p(x, y)$ be a polynomial with real coefficients.

(1) If

$$p\big(s, \log s\big) = 0 \qquad \text{for any real number } s \geq 1$$

show that p vanishes identically.

(2) If

$$p\big(s, \cos s\big) = 0 \qquad \text{for any real number } s$$

show that p vanishes identically.

Problem 3. A population, of N individuals, is affected by a virus. We indicate with S_n the number of those who on the day $n = 0, 1, 2, \dots$ have not yet contracted the disease; suppose $S_0 = N$, and suppose that every day a fraction α_n of the population contracts the virus, so that is the rule is

$$S_n - S_{n-1} = -\alpha_n S_{n-1} \qquad \text{for } n = 1, 2, \dots$$

(Do not give any weight to the fact that the numbers S_n may not be integers.). The fraction α_n is random, independent from day to day and it can take either the value $a \in (0, 1)$ with probability p, or the value 0 with probability $(1 - p)$, where $p \in (0, 1)$ is a given number.

Compute the probability of the event $S_n = N(1 - a)^k$, for $n = 1, 2, \dots$ and $k = 0, 1, \dots, n$. Moreover, compute also the mean value of S_n.

Physics

Problem 4. To explain atmospheric refraction, it is helpful to use a simplified model in which the refractive index of air decreases linearly with altitude, starting from a certain reference altitude ($z = 0$), from a value n_0 slightly greater than 1 ($n_0 = 1 + \Delta n$, where $\Delta n < 10^{-3}$) until it decreases to $n = 1$ after a thickness H, that is:

$$n(z) = n_0 \qquad z < 0 \,,$$

$$n(z) = n_0 - \frac{n_0 - 1}{H} z \qquad 0 < z < H \,,$$

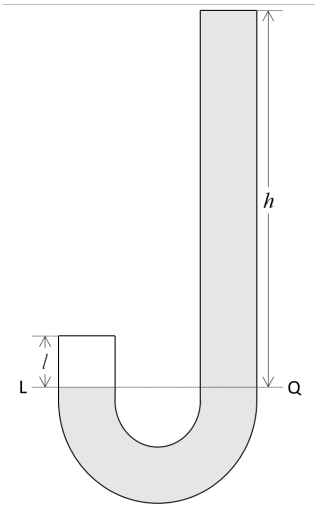
$$n(z) = 1 \qquad z > H \,.$$

1. Determine the conditions under which a light ray arriving from the region $z < 0$ at a small angle α_0 relative to the (x, y) plane undergoes total reflection and re-emerges propagating toward negative z.

2. Estimate the total path length travelled by the light ray in the variable-index region ($0 < z < H$).

3. Discuss how the quality of an image reflected in this way differs from that of an ideal mirror parallel to the (x, y) plane at $z = 0$.

Problem 5. A tube of cross-sectional area A is bent into a J shape, as shown in the figure (consider the portions above levels L and Q as regular vertical cylinders, with $h > 2l$). The tube is partially filled with an ideal liquid of density ρ (dark region) and partially with an ideal and biatomic gas (white region), and its ends are sealed. The initial configuration is at equilibrium: the gas occupies a volume $V_0 = Al$ and has pressure P_0. The whole system is immersed in a gravitational field with acceleration g directed downward, and the initial temperature is T_0.



Temperature variations and vapor pressure of the liquid have always to be neglected, and the density of the gas may be considered negligible compared with the one of the liquid.

1. Calculate the pressure at point Q and at the highest point of the tube; determine the conditions under which the configuration shown can represent a possible equilibrium state.

Starting from the equilibrium configuration described above, and assuming that ρ and h are sufficiently small, calculate the pressure at level Q and at the highest point of the tube (and compare them with their initial values) after the gas is transferred to the right-hand side of the tube under each of the following conditions:

2. the system is allowed to thermalize again at temperature T_0;

3. the system evolves solely under the action of gravity (for example, the upper left and upper right branches of the tube are connected by a narrow tube of negligible volume, allowing only the gas to pass through it; the connection is closed as soon as the liquid would begin to flow through it).

Problem 6. Two homogeneous cubic blocks of masses m_1 and m_2, with $m_2 > m_1$, are placed in contact on an inclined plane making an angle $\theta = 30^\circ$ with the horizontal. The block of mass m_1 is located lower down along the plane. The coefficient of static friction between each block and the plane is $\mu_s = 0.5$, while the coefficient of kinetic friction is

$$\mu_d = \frac{\mu_s}{2}.$$

An external force F, parallel to the plane and directed uphill, is applied to the block m_1, keeping the two blocks in equilibrium.

1. Compute the minimum value of the force F required to keep the system in equilibrium.
2. Compute the force that block m_1 exerts on block m_2 under this condition.
3. Compute the net force acting on block m_1 and comment on the result.
4. At a certain instant the force F is removed. Compute the velocity of the two blocks after 1 s.