ROM2F-06/32

Supersimmetria

F. Fucito[1] e A. Sagnotti[2]

[1] *Dipartimento di Fisica, Università di Roma "Tor Vergata"*
I.N.F.N., Sezione di Roma "Tor Vergata"
Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma
e-mail: fucito@roma2.infn.it

[2] *Scuola Normale Superiore e I.N.F.N.*
Piazza dei Cavalieri 7, 56126 Pisa
e-mail: sagnotti@sns.it

Abstract

Breve introduzione alla Supersimmetria e alle sue applicazioni preparata per l'Enciclopedia della Scienza e della Tecnica, Istituto dell'Enciclopedia Italiana.

1 Introduzione

Fino alle minuscole scale di distanza attualmente esplorate, dell'ordine di $10^{-16}cm$, mille volte circa al di sotto delle dimensioni di un nucleo, la materia appare costituita da combinazioni di poche decine di particelle elementari. Tra queste, le particelle di spin 1 includono il fotone γ, all'origine delle interazioni elettromagnetiche, i bosoni intermedi $W^{\pm}$ e Z, all'origine delle interazioni deboli, e i gluoni, all'origine delle interazioni forti della cromodinamica e quindi responsabili della stabilità dei nuclei. Le particelle di spin $1/2$ costituiscono in questo senso la materia propriamente detta, e comprendono i sei "sapori" di quarks che formano i protoni, i neutroni e le altre particelle adroniche, e i leptoni, ovvero gli elettroni, i muoni μ, i muoni τ e i corrispondenti neutrini ν_e, ν_μ e ν_τ, che partecipano direttamente solo ad interazioni deboli ed elettromagnetiche. Le proprietà di queste particelle sono descritte da un'estensione della teoria elettromagnetica di Maxwell, nota come Modello Standard, in grado di spiegare i fenomeni naturali con un successo senza precedenti nella storia della Scienza e senza evidenti contraddizioni, dalla scala, appunto, di $10^{-16}cm$ fino alle massime scale attualmente esplorate, in una finestra di oltre quaranta ordini di grandezza. Ma la struttura del Modello Standard non è del tutto soddisfacente: alcuni suoi aspetti, come la natura delle interazioni, sono infatti determinati da forti ragioni concettuali, mentre altri, e in particolare i tipi di particelle coinvolte, sembrano non rispondere a cogenti ragioni di principio.

L'esigenza di comprendere più a fondo le proprietà e le implicazioni del Modello Standard ha condotto, negli ultimi trenta anni, a studi molto estesi della Teoria Quantistica dei Campi, che ne costituisce l'ossatura portante. Questa unifica Meccanica Quantistica e Relatività Speciale, e descrive le particelle elementari in termini di un numero finito di campi, tra i quali appunto il campo elettromagnetico. Sono fondamentali in questo ambito i principi di simmetria, che vanno distinti in due grandi classi. Le *simmetrie globali*, invarianze delle leggi fisiche sotto operazioni effettuate simultaneamente, e in modo identico, in tutti i punti dello spazio tempo, sono in generale l'origine delle leggi di conservazione: ad esempio, l'invarianza sotto traslazioni temporali dà luogo alla conservazione dell'energia, e in modo simile altre simmetrie "interne", meno evidenti perché non legate allo spazio tempo, sono all'origine della conservazione della carica elettrica e della stabilità della materia ordinaria. Le *simmetrie locali o di gauge*, corrispondenti a trasformazioni indipendenti nei vari punti dello spazio tempo, sono invece ritenute all'origine della struttura delle interazioni tra le particelle. La possibilità di modificare, in modo indipendente nei diversi punti dello spazio tempo, la fase della funzione d'onda che la Meccanica Quantistica associa alle particelle è un esempio particolarmente importante di simmetria di gauge: essa lascia alle onde elettromagnetiche solo due polarizzazioni trasverse o, equivalentemente, assegna ai fotoni una massa nulla e pertanto un raggio d'azione infinito alle forze elettrostatiche, che sono infatti parte integrante della nostra esperienza quotidiana. Se il fotone avesse una massa M, questa simmetria sarebbe invece assente e le onde elettromagnetiche avrebbero un'ulteriore polarizzazione longitudinale e le forze elettrostatiche sarebbero direttamente avvertibili solo a distanze inferiori alla lunghezza di Compton $\frac{\hbar}{Mc} = 10^{-13}cm \times \frac{197}{Mc^2(MeV)}$, dove c denota la velocità della luce nel vuoto, $\hbar = h/2\pi$, con h la costante di Planck. Nella Fisica delle Alte Energie le masse vengono comunemente convertite in energie di riposo, Mc^2, che sono tipicamente misurate in MeV o in GeV, e inoltre $1fm = 10^{-13}cm$ è la dimensione di un nucleo di idrogeno. Per l'elettrone, ad esempio, l'energia di riposo è $M_e c^2 \approx 0.5 MeV$, mentre per il protone è $M_p c^2 \approx 1000 MeV$ o $1 GeV$. Le corrispondenti lunghezze di Compton sono quindi pari a circa $400 fm$ e $0.2 fm$.

La Meccanica Quantistica ha profonde implicazioni sulla natura delle particelle elementari, che si presentano in due grandi famiglie, i *bosoni* e i *fermioni*. La nomenclatura è in onore di S.N. Bose ed E. Fermi, che furono pionieri in questo campo di ricerca. Sono bosoni le particelle il cui spin è intero, ad esempio i fotoni, mentre sono fermioni quelle il cui spin è semintero, ad esempio gli elettroni. Le particelle del primo tipo tendono ad aggregarsi, al punto che la luce ci appare come una sorta di fluido continuo, mentre quelle del secondo tipo sono soggette al principio di esclusione di Pauli, che ne esalta la natura corpuscolare proibendo a due o più di esse di occupare simultaneamente lo stesso stato. La descrizione di queste due classi di particelle necessita di due tipi ben distinti di campi, e questo ha notevoli conseguenze nella teoria. Ad esempio, l'energia totale associata ad una collezione di n particelle bosoniche libere di massa m, impulso $\mathbf{p}$, spin 0 e frequenza $\omega_{\mathbf{p}}$ è

$$E_n(\mathbf{p}) \;=\; \hbar\, \omega_{\mathbf{p}} \left(n \;+\; \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \;, \tag{1.1}$$

ove

$$\omega_p \;=\; \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{1.2}$$

è l'energia relativistica posseduta da ciascuna particella. Il secondo addendo in eq. (1.1) è il contributo all'energia del vuoto, presente anche per $n = 0$, ovvero in assenza di particelle. Per i fermioni, invece, il principio di Pauli consente che al più una particella occupi uno stato assegnato. Ad esempio, per fermioni di spin 1/2 di massa m e impulso $\mathbf{p}$ le energie possibili sono

$$E_n(\mathbf{p}) \;=\; \hbar\, \omega_{\mathbf{p}} \left(n_{\uparrow} \;-\; \frac{1}{2} \right) \;+\; \hbar\, \omega_{\mathbf{p}} \left(n_{\downarrow} \;-\; \frac{1}{2} \right) \quad (n^{\uparrow}, n_{\downarrow} = 0, 1) \;, \tag{1.3}$$

dove $n^{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ indicano i loro numeri nei due possibili stati di spin. Si noti che bosoni e fermioni contribuiscono all'energia del vuoto con segni opposti, una caratteristica che avrà una rilevanza diretta in quanto ci apprestiamo a discutere.

Diversi tipi di particelle elementari di spin 1, come abbiamo visto, sono all'origine delle interazioni deboli, forti ed elettromagnetiche. Queste dominano i fenomeni fisici a livello microscopico, mentre le sole interazioni gravitazionali, la cui dinamica classica è descritta dalla Relatività Generale, determinano le proprietà dell'universo a grandi scale. Procedendo in analogia con i casi precedenti, la gravità sarebbe legata ad un'altra particella elementare di spin 2, detta gravitone, ma questa naturale identificazione introduce una serie di difficoltà tecniche e concettuali. Ad energie ordinarie, infatti, le interazioni gravitazionali tra particelle elementari sono troppo deboli per produrre effetti osservabili, e la stessa rivelazione diretta delle onde gravitazionali, l'analogo delle onde elettromagnetiche che sancirono rapidamente il successo della teoria di Maxwell, costituisce tuttora un argomento di frontiera per la Fisica sperimentale. Ma al crescere dell'energia cresce rapidamente l'intensità delle interazioni della materia ordinaria con i gravitoni e tra i gravitoni, al punto che oltre la scala di energia di Planck, $M_p c^2 \approx 10^{19} GeV$, queste divengono dominanti rispetto alle altre. A energie di questo ordine di grandezza, la descrizione della gravità offerta dalla Relatività Generale presenta difficoltà matematiche e concettuali che appaiono insormontabili ove si tenti di combinarla con la Meccanica Quantistica.

Torniamo ora al Modello Standard per meglio evidenziare alcune delle difficoltà cui abbiamo accennato precedentemente. Queste sono legate alla natura peculiare del meccanismo fisico alla base della spiegazione dell'origine delle masse dei fermioni e di alcuni bosoni di gauge, che richiede l'esistenza di una particella elementare di spin 0, detta bosone di Brout-Englert-Higgs, o più comunemente bosone di Higgs. Questa particella non è stata ancora osservata sperimentalmente, a dispetto dei molteplici tentativi effettuati negli ultimi venti anni, e la sua scoperta sarebbe oltremodo importante, perché confermerebbe che le simmetrie delle interazioni fondamentali sono solo in parte le simmetrie del vuoto. Il ruolo del bosone di Higgs sarebbe legato ad un fenomeno di "rottura spontanea" della simmetria in grado di conferire ai bosoni intermedi $W^\pm$ e Z le loro masse, corrispondenti ad energie di riposo di circa 100 GeV o a circa 100 masse protoniche, in modo compatibile con la consistenza della teoria. Come mostrato da G. 't Hooft e M. Veltman, le interazioni deboli che risultano da questo meccanismo sono in realtà molto simili a quelle elettromagnetiche, sebbene il loro raggio d'azione sia inferiore alle dimensioni di un nucleo atomico. Ma nel Modello Standard il fenomeno che dà massa ai tre bosoni intermedi $W^\pm$ e Z lascia una traccia indelebile, l'esistenza di un'altra particella scalare massiva, che è appunto il bosone di Higgs. La sua presenza non è indolore. Le sue interazioni introducono alcune difficoltà matematiche e rendono instabile gli effetti delle interazioni deboli: le fluttuazioni quantistiche tendono a spingere le masse dei bosoni intermedi verso la scala di Planck, che come abbiamo visto caratterizza invece l'intensità delle interazioni gravitazionali ed è dell'ordine di $10^{19}\,GeV$, ben più elevata quindi della scala elettro-debole che caratterizza le masse dei bosoni intermedi $W^\pm$ e Z [1]. A questa difficoltà, nota come "problema della gerarchia", se ne aggiunge un'altra, nota come "problema della costante cosmologica": la stima microscopica della curvatura media dell'universo fatta sulla base di ciò che è noto, a livello delle particelle elementari, è in totale disaccordo con il valore osservato. La base di questa analisi si intravede in eq. (1.1) e in eq. (1.3): campi bosonici e fermionici contribuiscono con segno opposto all'energia del vuoto, nella misura di $\pm\hbar\omega_p/2$ per ogni loro onda, e pertanto il valore essenzialmente nullo richiesto dalla Cosmologia si ottiene solo se i gradi di libertà bosonici e fermionici si bilanciano esattamente. Questo non avviene nel Modello Standard, che contiene almeno 90 gradi di libertà fermionici [2] e solo 28 gradi di libertà bosonici [3], e l'energia di vuoto per unità di volume che ne risulta è quindi enorme, ed è proporzionale a M_p^4 se la lunghezza di Planck definisce in qualche modo la minima scala di distanza accessibile. Ebbene, questa stima è appunto in eccesso, rispetto ai dati sperimentali, per oltre 100 ordini di grandezza!

Come abbiamo visto, un bosone e un fermione non potrebbero essere più diversi, ma in alcune teorie questi due tipi di particelle sono legati da una simmetria molto sorprendente, detta *Supersimmetria*. Per essa esistono due tipi ben distinti di realizzazioni. Come *simmetria*

[1]Si noti, per contrasto, che anche se non siamo in grado di predire le masse delle particelle fermioniche del Modello Standard, la natura della Teoria dei Campi garantisce la stabilità dei valori per esse osservati.

[2]Sei sapori di quarks e sei di anti-quarks (u, d, c, s, b, t), ognuno dei quali può presentarsi in tre colori (r, g, b) e due stati di spin indipendenti; e, μ, τ e corrispondenti anti-particelle, che possono presentarsi in una coppia di stati di spin indipendenti; tre neutrini e corrispondenti anti-particelle, ognuna con almeno uno stato di spin.

[3]Le nove polarizzazioni di $W^\pm$ e Z, le due del fotone γ, le sedici degli otto gluoni e, infine, il campo di Higgs.

globale, la Supersimmetria scambia tra loro i campi associati a particelle bosoniche e fermioniche, introducendo importanti restrizioni sia sulle loro proprietà che sulle loro interazioni. Come *simmetria locale*, la Supersimmetria dà invece luogo ad un nuovo tipo di interazione, mediata da un tipo di campo, detto gravitino, che è allo stesso tempo un vettore come il potenziale elettromagnetico e un fermione come un quark o un leptone. I modelli corrispondenti prendono il nome di *Supergravità*, perchè si caratterizzano come estensioni della Relatività Generale.

Come vedremo, una Supersimmetria globale esatta richiede la presenza di campi bosonici e fermionici in coppie e con uguali masse, e le semplici considerazioni svolte precedentemente ci permettono di concludere che essa consentirebbe di risolvere i due problemi della gerarchia e della costante cosmologica. Si tratta quindi di una simmetria di indubbia eleganza, e non deve quindi sorprendere che il suo studio polarizzi ormai da oltre trenta anni gli sforzi di una parte cospicua della comunità scientifica, a dispetto delle difficoltà che una sua piena integrazione nella fisica delle particelle elementari incontra a tutt'oggi. Tra queste, la più evidente è proprio la necessità di disporre di coppie Bose-Fermi con uguali masse che, come abbiamo visto, non sono presenti nel Modello Standard, le cui particelle sono in massima parte fermioni. Come la simmetria di gauge elettro-debole, che richiede la rottura spontanea ed il fenomeno di Higgs, la Supersimmetria non può quindi essere esatta, ma nella migliore delle ipotesi è spontaneamente rotta. Il problema della sua rottura spontanea appare molto complesso, ma d'altra parte la rigidità delle teorie supersimmetriche le rende particolarmente attraenti dal punto di vista concettuale: esse unificano mediatori di interazione (γ, gluoni, $W^{\pm}$, Z) e materia, e la loro struttura consente costruzioni matematiche impensabili in altri contesti.

2 Modelli supersimmetrici

Una teoria di campo contiene in generale contributi esprimibili, nell'intorno di una configurazione assegnata, in termini di uno sviluppo in potenze crescenti dei suoi campi bosonici e fermionici. Tra questi, i termini lineari definiscono gli accoppiamenti con eventuali sorgenti esterne, quelli quadratici caratterizzano i tipi e le proprietà delle particelle coinvolte, mentre i termini di ordine superiore definiscono la natura delle loro interazioni. La Supersimmetria richiede che ogni campo sia accompagnato da altri nei quali può trasformarsi, e pertanto introduce restrizioni sia sulla natura dei campi delle teorie che sulle sorgenti o sulle interazioni. In questa voce non potremo che limitarci ad una breve descrizione delle collezioni di campi presenti in teorie supersimmetriche, detti comunemente super multipletti, ma il lettore interessato potrà trovare ulteriori dettagli nella bibliografia.

Bose	Fermi
φ	ψ
A_μ	ψ
e_μ^a	ψ_μ

Tabella I. Multipletti di Supersimmetria $N = 1$ in $D = 4$.

Cerchiamo ora di chiarire la logica che determina la struttura dei termini quadratici. La tab. I mostra a scopo esemplificativo alcuni multipletti di campi di massa nulla comunemente presenti in teorie con una Supersimmetria in quattro dimensioni ($N = 1; D = 4$).

Vediamo quindi che il primo esempio di supermultipletto, detto anche multipletto scalare o di Wess-Zumino, contiene uno scalare complesso φ (o, equivalentemente, due scalari reali) e un fermione di Weyl ψ [4]. L'esempio successivo, detto anche multipletto vettoriale, contiene invece un vettore A_μ e uno spinore di Weyl ψ. Il terzo, infine, detto anche multipletto della Supergravità, contiene un "vielbein", che descrive il campo gravitazionale, e un gravitino di Weyl. Quest'ultimo è uno spinor-vettore ψ_μ, e la particella corrispondente, detta gravitino, ha spin $3/2$. La logica che sottende tutti questi casi è l'esatto bilanciamento del numero di gradi di libertà tra bosoni e fermioni. Nel primo caso due per lo scalare complesso e due per il fermione di Weyl (con elicità $\hbar/2$ per la particella e $-\hbar/2$ per la corrispondente antiparticella), nel secondo due per il fermione di Weyl e due per il vettore (con elicità $\pm\hbar$), e infine nel terzo caso due per il gravitone (con elicità $\pm 2\,\hbar$) e due per il gravitino (con elicità $3\hbar/2$ per la particella e $-3\hbar/2$ per la corrispondente antiparticella).

Il primo multipletto, a differenza degli altri, consente in modo naturale l'introduzione di *masse uguali* per lo scalare complesso e il fermione. Per gli altri, sulla base di quanto già detto, l'interesse è nella generazione di masse mediante rottura spontanea, preservando la Supersimmetria, un fenomeno che può essere discusso partendo dal caso di massa nulla, in termini di multipletti che assorbono altri multipletti. Ad esempio, se un multipletto vettoriale assorbe un multipletto scalare, il risultato è un multipletto vettoriale dotato di massa, che contiene un vettore massivo (le cui tre polarizzazioni hanno origine dalle due del vettore originale di massa nulla e da quella di uno degli scalari del multipletto di Wess-Zumino), uno scalare reale e una coppia di spinori. In generale, è possibile mostrare che, in quattro dimensioni, i multipletti massivi contengono una catena di $2s + 1$ stati di spin s, due catene di $2s$ stati di spin $s - 1/2$ e una catena di $2s - 1$ stati di spin $s - 1$. Nel modello di Wess e Zumino è possibile introdurre auto-interazioni del campo scalare φ, descritte ad esempio da un potenziale, un polinomio in φ di grado superiore a due che la Supersimmetria lega ad altre interazioni tra bosoni e fermioni [5]. La struttura del multipletto vettoriale fissa completamente la forma della teoria $N = 1$ SYM, nella quale la Supersimmetria determina il tipo di interazione tra A_μ e ψ.

Il multipletto di Wess e Zumino e il multipletto vettoriale sono la base del Modello Standard Supersimmetrico Minimale (MSSM), la più semplice estensione supersimmetrica del Modello Standard compatibile con i dati sperimentali oggi disponibili, che possiamo ora descrivere brevemente. La sua caratteristica essenziale è la sostituzione di ogni particella del Modello Standard con un super multipletto, ovvero l'associazione di un partner supersimmetrico ad ogni particella nota. Ai portatori di forze (8 gluoni, $W^\pm$, Z e γ), vengono quindi aggiunti 12

[4] In un numero pari di dimensioni, un fermione di Dirac può essere decomposto in una coppia di fermioni di Weyl, ciascuno dei quali possiede la metà delle sue componenti. In $D = 4$ (tre dimensioni spaziali e la dimensione temporale) un fermione di Weyl, utilizzato ad esempio per descrivere lo stato di elicità di un neutrino e quella corrispondente di un anti-neutrino, è equivalente ad un fermione "reale", o di Majorana, adatto a descrivere una particella di spin $1/2$ non carica elettricamente.

[5] In particolare questo potenziale deve essere il modulo quadrato di una funzione olomorfa di φ, e quindi una quantità non negativa.

fermioni, detti genericamente “gaugini”, e a quarks e leptoni vengono aggiunti altrettanti scalari complessi, detti “s-quarks” e “s-leptoni”. Una sottigliezza della teoria, legata alle fluttuazioni quantistiche, che altrimenti darebbero luogo ad inconsistenze dette “anomalie”, rende in realtà necessario introdurre una coppia di multipletti di Higgs. Inoltre, la stabilità della materia ordinaria richiede che le possibili interazioni siano ristrette da una simmetria, detta R-parità, che costringe i partners delle particelle note a comparire in numero pari nei processi di diffusione. Poiché una particella può decadere solo in altre di massa inferiore, il partner supersimmetrico più leggero (LSP) è stabile: la regola di selezione imposta dalla R-parità impone infatti che i suoi prodotti di decadimento includano almeno un altro partner supersimmetrico, ma questo è necessariamente di massa superiore. Una particella fermionica scarica di questo tipo potrebbe essere costituire quella materia oscura, cioè non luminosa, che sembra rappresentare circa il 25% della densità di energia dell’universo, a fronte del 5% circa che è invece composto di materia ordinaria. In questa forma il modello descriverebbe però un mondo comletamente supersimmetrico. Esso va quindi completato con opportuni meccanismi per la rottura della Supersimmetria. Questi devono eliminare, in particolare, i partners troppo leggeri, che altrimenti sarebbero già stati rivelati in laboratorio. Il nuovo collisore LHC del CERN, che entrerà pienamente in attività entro il 2009, potrà fornire alcune risposte concrete sulla reale applicabilità di questo schema alla fisica delle alte energie e sui meccanismi di rottura di Supersimmetria in esso coinvolti, che discuteremo brevemente in una sezione successiva. È bene comunque notare che il numero dei parametri liberi in questo modello, lungi dal diminuire, aumenta in modo considerevole rispetto al Modello Standard. Ma il MSSM ha indubbiamente la virtù di risolvere il problema della gerarchia, al quale abbiamo accennato nell’Introduzione, e di rendere meno severo quello della costante cosmologica. Come vedremo brevemente nella prossima sezione, la Supersimmetria, anche in presenza di opportuni meccanismi per la sua rottura, garantisce infatti la stabilità della scala elettro-debole rispetto alle fluttuazioni quantistiche. Inoltre, il problema della costante cosmologica è almeno attenuato: ad energie maggiori della scala $M_s c^2$ di rottura della Supersimmetria il modello appare infatti supersimmetrico, e pertanto la stima, M_{Pl}^4, per la densità di energia del vuoto menzionata nell’Introduzione si riduce almeno a M_s^4, perchè tutti gli ulteriori contributi si cancellano esattamente. Questa scala $M_s c^2$ è peraltro limitata inferiormente dal valore di 1TeV, ovvero mille volte circa l’energia di riposo di un protone, dai dati sperimentali attualmente disponibili. Comunque, con la Supersimmetria rotta genericamente ad 1TeV, anche in assenza di ulteriori aggiustamenti, la discrepanza tra stime microscopiche e macroscopiche della costante cosmologica si ridurrebbe almeno di 60 ordini di grandezza.

Bose	Fermi
$2 \times \varphi$	$2 \times \psi$
A_μ , φ	$2 \times \psi$
e_μ^a , A_μ	$2 \times \psi_\mu$
A_μ , $6 \times (\varphi = \varphi^\dagger)$	$4 \times \psi$
e_μ^a , $6 \times A_\mu$, φ	$4 \times \psi_\mu$, $4 \times \psi$
e_μ^a , $28 \times A_\mu$, $70 \times (\varphi = \varphi^\dagger)$	$8 \times \psi_\mu$, $56 \times \psi$

Tabella II. Multipletti $N = 2, 4, 8$ in $D = 4$.[6]

Il Modello Standard possiede una caratteristica del tutto peculiare, sulla quale non ci siamo soffermati nell'Introduzione: le interazioni deboli violano la parità, dal momento che coinvolgono in differente misura diversi stati di spin delle particelle collegati da riflessioni spaziali. È possibile mostrare che questa proprietà è compatibile, al più, con la Supersimmetria $N = 1$ che abbiamo appena descritto, ma è nondimeno interessante caratterizzare i modelli con più supersimmetrie, anche e soprattutto perché le loro proprietà li rendono estremamente interessanti dal punto di vista matematico. La Tabella II riassume pertanto le caratteristiche salienti di alcuni multipletti di Supersimmetria estesa, con $N = 2, 4, 8$. La notazione ricorda che in questi casi esistono 2, 4 o 8 diversi tipi di trasformazioni che mescolano tra loro campi bosonici e fermionici. Anche se esistono esempi di teorie simili, con campi di spin non superiore a due, per ogni N tra 1 e 8, abbiamo scelto di discutere questi casi perché essi caratterizzano le supersimmetrie estese compatibili, rispettivamente, con massimo spin 1/2 ($N = 2$), massimo spin 1 ($N = 4$) e massimo spin 2 ($N = 8$). I modelli corrispondenti hanno tutti un notevole interesse per i moderni sviluppi matematici della Teoria dei Campi.

I multipletti con massimo spin 2 meritano una descrizione a parte, perché corrispondono ad estensioni della Relatività Generale note come Supergravità, in cui le interazioni gravitazionali, e la simmetria che ad esse sottende, emergono dalla Supersimmetria. È possibile giustificare in parte questo importante risultato in termini qualitativi. Notiamo infatti che, in generale, se un sistema possiede una coppia di simmetrie, il risultato della loro azione combinata dipende dall'ordine con cui le trasformazioni vengono fatte agire. Questo non è vero in casi particolarmente semplici, ad esempio per due successive rotazioni di una ruota intorno al suo asse, di angoli θ_1 e θ_2, il cui risultato è semplicemente una rotazione di angolo $\theta_1 + \theta_2$. Ma si verifica già per una coppia di rotazioni intorno ad assi diversi, ad esempio per due rotazioni di un angolo retto intorno a diversi assi coordinati, e similmente due piccole rotazioni diverse operate in opposto ordine differiscono per un'ulteriore piccola rotazione. Ebbene, lo stesso vale per una coppia di trasformazioni di Supersimmetria, il cui risultato finale dipende dal loro ordine, e due piccole trasformazioni operate in opposto ordine differiscono anche in questo caso per un'altra piccola trasformazione. Ma, sorprendentemente, questa ulteriore simmetria è una traslazione spazio-temporale, un'operazione intimamente legata alla simmetria di gauge della Relatività Generale, che rende conto della profonda relazione tra supersimmetria locale e gravità. Esistono 8 diversi tipi di Supergravità "pure", con numeri crescenti di gravitini in interazione tra loro, con il campo gravitazionale e con numeri crescenti di altri campi. Particolarmente complesse e ricche sono le interazioni che coinvolgono campi scalari, per le quali sono possibili eleganti caratterizzazioni geometriche. Le Supergravità ammettono anche deformazioni in cui interessanti potenziali emergono per i campi scalari e i gravitini acquistano nuove interazioni con i vettori di gauge. Recentemente queste teorie della gravità sono state collegate, in modo assolutamente sorprendente, alla teoria $N = 4$ SYM, che contiene solo vettori, scalari e spinori, basata sul quarto multipletto in tabella II, nell'ambito della cosiddetta corrispondenza AdS/CFT.

[6] La condizione $\varphi = \varphi^\dagger$ indica scalari reali.

Bose	Fermi
A_μ $e^a_\mu\ ,\ B_{\mu\nu}\ ,\ (\varphi = \varphi^\dagger)$	ψ $\psi_\mu\ ,\psi$
$e^a_\mu\ ,\ (\varphi = \varphi^{\dagger})\ ,\ A_\mu\ ,B_{\mu\nu}\ ,C_{\mu\nu\rho}$	$\psi_\mu\ ,\psi'_\mu\ ,\psi\ ,\ \psi'$
$e^a_\mu\ ,\ 2\times B_{\mu\nu}\ ,\ 2\times(\varphi = \varphi^\dagger)\ ,\ A^+_{\mu\nu\rho\sigma}$	$2\times\psi_\mu\ ,\ 2\times\psi$
$e^A_M\ ,\ C_{MNP}$	ψ_M

Tabella III. Multipletti in $N = I, IIA, IIB; D = 10$ e $N = I; D = 11$.

È possibile generalizzare la costruzione dei multipletti al caso di uno spazio tempo con più di quattro dimensioni. La loro struttura cambia in modo considerevole: nuovi campi acquistano infatti un ruolo indipendente in $D > 4$, mentre i gradi di libertà dei campi fermionici crescono molto rapidamente, in modo esponenziale, con D. La tabella III riassume le proprietà dei multipletti in $D = 10, 11$. Nel primo caso esistono tre multipletti con al più campi di spin 2, detti rispettivamente di tipo I, IIA e IIB. Il rapido incremento delle componenti fermioniche ha un'importante conseguenza: una Supersimmetria in $D = 10$ corrisponde a quattro supersimmetrie in $D = 4$, e pertanto il primo di questi casi è legato alle teorie con $N = 4$, mentre gli altri due, inequivalenti in $D = 10$, sono entrambi legati alla Supergravità $N = 8$ [7]. In tutti questi casi, il legame si manifesta attraverso il meccanismo di Kaluza-Klein: se alcune dimensioni dello spazio tempo in $D = 10$ sono circonferenze molto piccole, la teoria iniziale si riduce a basse energie alle corrispondenti teorie in $D = 4$. Il multipletto in $D = 11$ è forse il più interessante: è unico, e la corrispondente Supergravità è particolarmente semplice, in quanto non contiene campi scalari. Queste teorie in $D = 10$ e in $D = 11$ coinvolgono interessanti generalizzazioni del campo elettromagnetico, i cui potenziali sono tensori antisimmetrici. L'esempio più semplice è il campo $B_{\mu\nu}$, presente in tutte le teorie in $D = 10$. Ebbene, è possibile mostrare che, come le sorgenti del campo A_μ sono particelle cariche elettricamente, così le sorgenti di $B_{\mu\nu}$[8] sono stringhe, e quelle di tensori antisimmetrici con numeri maggiori di indici sono in generale membrane o oggetti estesi con maggiori numeri di dimensioni. La comparsa di questo tipo di campi non è casuale: le teorie in $D = 10$ sono infatti intimamente legate alla Teoria delle Stringhe, e in particolare alle stringhe supersimmetriche, o "superstringhe", per le quali esse forniscono una descrizione effettiva valida a basse energie. Anche la Supergravità in $D = 11$ è legata alla Teoria delle Stringhe, ma in un modo più sottile, chiarito in solo parte negli ultimi anni.

3 Risultati esatti in teorie supersimmetriche

Vogliamo ora descrivere alcune proprietà delle teorie supersimmetriche che le rendono davvero uniche nel panorama della Teoria Quantistica dei Campi. Dovremo limitarci per necessità a

[7] Nei multipletti in $D = 10$ gli spinori sono soggetti alle due proiezioni di Majorana e Weyl, che in questo caso sono indipendenti e mutuamente compatibili, mentre lo spinore in $D = 11$ è soggetto al vincolo di Majorana.

[8] Questo tipo di campo e le sue generalizzazioni cambiano segno se si inverte l'ordine di una coppia di indici, cosicché $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$.

considerazioni qualitative, ma il lettore interessato potrà nuovamente consultare la bibliografia per ulteriori dettagli.

È conveniente richiamare anzitutto il concetto di integrale funzionale sviluppato da R.P. Feynman. La Meccanica Quantistica fu inizialmente formulata nel linguaggio hamiltoniano, sostituendo alle grandezze classiche altrettanti operatori Hermitiani. Il principio di indeterminazione di Heisenberg trova infatti una naturale realizzazione in termini di operatori non mutuamente commutanti, ma dopo gli iniziali successi con la Fisica degli atomi, lo studio delle interazioni elettromagnetiche rivelò ben presto che la teoria presentava notevoli difficoltà che risultavano dalla comparsa di probabilità addirittura divergenti. L'analisi di questo fenomeno richiedeva che la complessità dei calcoli fosse ridotta al minimo, introducendo quante più semplificazioni possibile, e suggeriva pertanto il ricorso a metodi di calcolo in grado di preservare ad ogni loro stadio la simmetria di Lorentz. Dopo alcuni anni di ricerche febbrili, si comprese infine che queste divergenze potevano essere rimosse mediante una procedura, detta rinormalizzazione, in grado di associare valori ben definiti alle grandezze fisiche di interesse. Mentre il formalismo veniva affinato da altri autori, Feynman affrontò il problema con metodi alternativi e altamente sorprendenti che aveva iniziato a sviluppare durante la sua Tesi di Dottorato, basati sul formalismo Lagrangiano e su una rappresentazione intuitiva delle ampiezze di probabilità associate ad eventi di diffusione. Possiamo cercare di illustrarne gli aspetti essenziali, considerando per semplicità il caso di una particella non relativistica, alla quale la Meccanica Classica associa una ben definita traiettoria $x_c(t)$ determinata dalle equazioni del moto. Secondo Feynman, le ampiezze della Meccanica Quantistica possono invece essere ottenute da un "integrale funzionale", una somma pesata di numeri complessi associati a tutte le possibili traiettorie. Ad esempio, per una particella non relativistica di massa m soggetta ad un potenziale $V(x)$ le ampiezze di evoluzione vengono calcolate usando la formula

$$\langle x\,'|e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|x\rangle \;=\; \int_{[x(0)=x;\,x(t)=x\,']} Dx(\tau)\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau \left(\frac{m(\dot{x})^2}{2}\;-\;V(x)\right)} \;, \tag{3.1}$$

nella quale i denota l'unità immaginaria, H è l'Hamiltoniana del sistema e l'espressione nell'esponente è l'azione, ovvero l'integrale della corrispondente Lagrangiana. In generale, il calcolo esatto di questa espressione sarebbe oltremodo complesso, non meno che nel formalismo Hamiltoniano, perché richiederebbe la precisa definizione della misura di integrazione su tutte le possibili curve, uno spazio di dimensione infinita per il quale una caratterizzazione rigorosa è stata possibile solo in un numero limitato di casi. In molti esempi di interesse per la Fisica è però possibile ordinare gli effetti della Meccanica Quantistica in una serie di potenze nelle costanti di accoppiamento o anche nella costante di Planck $\hbar$. Dal punto di vista tecnico, questo sviluppo non fornisce risultati esatti ma ha essenzialmente la valenza di una serie asintotica: come il metodo del punto di sella per funzioni di variable complessa, essa può condurre nondimeno a risultati molto accurati. In questo ambito, le correzioni quantistiche possono essere associate a contributi di traiettorie non troppo dissimili da $x_c(t)$ o, in termini più squisitamente tecnici, a fluttuazioni intorno alla traiettoria classica.

A dispetto della mancanza di rigore matematico, la proposta fu subito accolta con grande favore, anche perché essa associa in modo assai ingegnoso il calcolo approssimato di ampiezze di diffusione tra particelle a somme di diagrammi (diagrammi di Feynman), i quali rappresentano a loro volta le traiettorie nello spazio-tempo in cui particelle "virtuali" sono emesse e riassorbite. Il metodo funziona assai bene nei casi di piccole costanti di accoppiamento, in cui diagrammi con pochi scambi di particelle determinano con buona approssimazione le probabilità di diffusione, ma si è rivelato inapplicabile in casi di accoppiamento forte. I diagrammi divergenti contengono anelli chiusi, nei quali le particelle possono circolare con impulso ed energia arbitrari, e valori finiti si ottengono in generale solo introducendo un limite superiore Λ per le componenti dell'impulso. In un'ampia classe di teorie, dette appunto rinormalizzabili, la procedura di rinormalizzazione è in grado di eliminare, sottraendoli opportunamente, i contributi che crescono con Λ dando luogo a risultati ben definiti, esprimibili in termini di un numero finito di parametri (masse e costanti di accoppiamento) che, nei modelli di interesse fisico, vengono desunti dagli esperimenti.

Il calcolo dell'integrale funzionale è stato in seguito esteso a fluttuazioni intorno a traiettorie più complesse. Le traiettorie più interessanti sono in realtà definite nello spazio Euclideo, in cui l'integrale diventa

$$\langle x\,'|e^{-\frac{Ht}{\hbar}}|x\rangle \;=\; \int_{[x(0)=x;\, x(t)=x\,']} Dx(\tau)\; e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^t d\tau\left(\frac{m(\dot{x})^2}{2}\,+\,V(x)\right)}\;. \tag{3.2}$$

Questo importante filone di ricerca venne stimolato dalla cruciale scoperta, nel 1975 da parte di A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz e Yu.S. Tyupkin, di soluzioni definite nello spazio Euclideo che rappresentano i fenomeni di "tunneling" nel caso di sistemi con infiniti gradi di libertà. Queste soluzioni, dette "istantoni" perché concentrate intorno ad un punto dello spazio tempo Euclideo, rendono possibile il calcolo di effetti non perturbativi, $\mathcal{O}\left(e^{-\frac{1}{\hbar}}\right)$, non rappresentabili in serie di potenze di $\hbar$ e quindi altrimenti inaccessibili. Appare quindi ragionevole affermare che l'integrale funzionale è oggi il principale strumento di analisi non solo per la Teoria dei Campi, ma sorprendentemente anche per la Meccanica Statistica. Possiamo dare semplicemente un'idea di questa connessione. Infatti partendo da (3.2), posto$x = x\,'$ e integrando sul loro valore comune, l'espressione che ne risulta definisce la funzione di partizione

$$Z \;=\; tr\left(e^{-\beta H}\right) \;=\; \oint Dx(\tau)\; e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\beta\hbar} d\tau\left(\frac{m(\dot{x})^2}{2}\,+\,V(x)\right)}\;, \tag{3.3}$$

dove $\beta = 1/k_B T$, con k_B la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta. In questo caso l'integrazione è su traiettorie chiuse, per le quali x è periodica con periodo $\beta\hbar$: $x(\beta\hbar) = x(0)$. Va qui segnalata una sottigliezza: per campi fermionici la condizione di periodicità va sostituita con $\psi(\beta\hbar) = -\psi(0)$ a causa della peculiare relazione tra spin e statistica necessaria per avere consistenza con il principio di Pauli. Ma a questo progresso concettuale non seguì, almeno inizialmente, un analogo progresso tecnico, e infatti i primi tentativi di utilizzare gli istantoni per studiare effettivamente fenomeni non perturbativi, ovvero non esprimibili in termini di potenze di $\hbar$, nel Modello Standard furono piuttosto deludenti, proprio in conseguenza della comparsa di divergenze ultraviolette.

Questo panorama cambia in modo significativo per le teorie supersimmetriche: in esse, come abbiamo visto, ogni bosone è accompagnato da un corrispondente fermione, la cui presenza ha importanti effetti sia a livello perturbativo che a livello non perturbativo. Nei diagrammi di Feynman, infatti, bosoni e fermioni contribuiscono con segni opposti ad ogni anello chiuso, cosicché i loro contributi tendono a ridurre, o eventualmente ad eliminare del tutto, le divergenze ultraviolette. La teoria $N = 4$ SYM è un esempio particolarmente significativo: in questo caso è possibile mostrare che le divergenze ultraviolette sono del tutto assenti nelle ampiezze di diffusione. Questo tipo di cancellazioni fa il paio con un altro effetto, più semplice, che abbiamo discusso nell'Introduzione: le energie di vuoto di bosoni e fermioni, come abbiamo visto, hanno segni opposti e tendono parimenti ad elidersi. In generale, la conclusione è che teorie supersimmetriche coinvolgono divergenze più lievi rispetto ad altre teorie di campo, e quindi, in un certo senso, sono meno sensibili alle correzioni di tipo quantistico. Questo comportamento può essere utilizzato per il problema della gerarchia delle scale di massa, al quale avevamo accennato in precedenza. Ma masse bosoniche e fermioniche sono collegate tra loro, e pertanto la relativa stabilità di queste ultime si trasmette, per Supersimmetria, alle prime, stabilizzando i valori delle masse dei bosoni $W^{\pm}$ e Z. Esistono altri risultati, meno evidenti, che coinvolgono l'assenza delle correzioni ad altre grandezze e che possono essere spiegati in termini di ulteriori vincoli introdotti dalla Supersimmetria.

Le interazioni che intervengono nella Supergravità non consentono di portare avanti la procedura di rinormalizzazione, ma queste teorie godono nondimeno di proprietà notevoli. Ad esempio, è possibile mostrare che già la Relatività Generale non dà luogo, sorprendentemente, a divergenze ultraviolette in ampiezze di diffusione con un solo anello chiuso, e che questa proprietà è condivisa solo da tutte le teorie di Supergravità "pure", nelle quali compare il solo multipletto di Supergravità ma non multipletti di materia. Per esse, inoltre, la Supersimmetria esclude la presenza di divergenze anche in ampiezze di diffusione con due anelli chiusi, e da anni si dibatte sull'ordine al quale queste divergenze potrebbero comparire nella Supergravità $N = 8$ (oggi si propende per il caso di diagrammi con almeno sette anelli chiusi, ma ulteriori sorprese sono ancora possibili).

Anche nel regime non-perturbativo è possibile ottenere alcuni risultati esatti, grazie al fatto che le fluttuazioni di campi bosonici e fermionici intorno ad una soluzione istantonica supersimmetrica si compensano esattamente. In alcuni casi l'integrale funzionale è determinato dalle sole proprietà di queste soluzioni, e può essere calcolato sommando i contributi delle fluttuazioni quantistiche attorno alla soluzione istantonica. In pratica, anche questo calcolo è assai complesso: la soluzione istantonica dipende infatti da un certo numero di parametri continui, la cui caratterizzazione matematica è molto difficile in generale. Fortunatamente l'integrale funzionale può essere ridotto ad integrazioni finito-dimensionali sugli spazi di questi parametri, e l'esatta definizione della misura corrispondente è stata il risultato di una proficua sinergia tra Fisica e Matematica. Lo studio dettagliato delle soluzioni istantoniche e il ricorso a sofisticati metodi di Geometria Algebrica hanno reso infatti possibile il calcolo esplicito di alcuni integrali funzionali associati a proprietà dello spazio dei parametri di soluzioni istantoniche. Ad esempio, S.K. Donaldson, al tempo ricercatore presso l'Università di Oxford, comprese che le soluzioni istantoniche consentono di definire e calcolare alcuni invarianti topologici che caratterizzano, seppur parzialmente, le varietà in quattro dimensioni [9]. Questo è quindi un caso notevole in cui la Fisica ha

[9] La Topologia studia le proprietà degli oggetti geometrici che non dipendono da eventuali deformazioni continue: ad esempio, una sfera e un ellissoide hanno la stessa topologia, ma questa è diversa da quella di una ciambella, nella quale queste due superfici non possono essere deformate con continuità.

suggerito la soluzione di un importante problema matematico. Ma queste stesse tecniche hanno anche consentito il calcolo delle correzioni quantistiche in una teoria supersimmetrica $N = 2$ che richiama, sotto certi aspetti, la descrizione delle interazioni forti o di colore nel Modello Standard. N. Seiberg ed E. Witten sono infatti riusciti a mostrare, nel 1994, che in questo modello le cariche portate dai campi fermionici della teoria sono esattamente confinate in composti neutri. Cerchiamo di spiegare brevemente la natura di questo problema, per meglio illustrare la struttura della soluzione e la sua importanza. Negli anni sessanta, M. Gell-Mann and G. Zweig proposero che gli adroni, le particelle soggette alle interazioni forti, fossero composti di quarks, più o meno come un nucleo è composto di protoni e neutroni. Ma fu presto chiaro che quarks liberi non si osservano in natura, e questo pose il problema di spiegare perché essi si presentino solo in composti neutri rispetto alla carica di colore. G. 't Hooft, S. Mandelstam, G. Parisi e altri notarono che la contemporanea presenza di cariche e monopoli nel vuoto potrebbe dar luogo al confinamento delle cariche di colore, rendendo impossibile la loro separazione in composti neutri, grazie ad un meccanismo che ricorda l'effetto Meissner in grado di espellere campi magnetici dall'interno di un superconduttore. Negli anni '30 W. Meissner e R. Ochselnfeld mostrarono infatti che deboli campi magnetici non penetrano all'interno di un superconduttore ideale (oggi diremmo un superconduttore di tipo I). In realtà, in una vasta classe di superconduttori, che oggi diremmo di tipo II, campi magnetici di sufficiente intensità riescono a penetrare ma solo all'interno di piccoli "tubi di flusso". L'energia in questi tubi, nei quali vengono compresse le linee di forza del campo, cresce proporzionalmente alla loro lunghezza, e questo crea una barriera che impedisce la separazione delle cariche magnetiche alle loro estremità. Il meccanismo rilevante, nel caso delle interazioni forti di colore, è in realtà legato al precedente da una dualità elettro-magnetica: questa scambia campi elettrici e magnetici e le cariche corrispondenti, in modo tale che i piccoli "tubi" terminano invece su cariche di colore, la cui separazione richiede parimenti un'energia che cresce linearmente con la distanza. Per dimostrare la plausibilità di questo scenario, è necessario mostrare che il vuoto della teoria contiene monopoli in grado di unirsi in coppie per dare origine alla superconduttività, e quindi all'effetto Meissner duale, con il conseguente confinamento delle cariche di colore. Ebbene, questi risultati emergono in modo diretto dal calcolo esatto di Seiberg e Witten nella teoria supersimmetrica $N = 2$, che rappresenta una delle più interessanti applicazioni della Supersimmetria alla teoria delle interazioni forti.

4 Il problema della rottura della Supersimmetria

Al di là della sua indubbia eleganza, la Supersimmetria ha quindi profonde implicazioni in Teoria dei Campi. Ad esempio, oltre a dar luogo, come abbiamo visto, a cancellazioni di divergenze, essa garantisce in generale ai sistemi a cui si applica una notevole stabilità. Il suo ruolo acquista quindi una rilevanza particolare nella Teoria delle Stringhe, la cui dinamica è oggi in massima parte fuori dalla nostra portata in assenza di Supersimmetria. Ma essa può essere realizzata al più in modo indiretto e non evidente in Natura, perché le particelle elementari del Modello Standard, come abbiamo visto, non si presentano in multipletti supersimmetrici. Un'estensione supersimmetrica del Modello Standard, come ad esempio il MSSM, deve quindi coinvolgere meccanismi di "rottura" in grado di conferire ai partners supersimmetrici delle particelle note, nessuno dei quali è stato a tutt'oggi rivelato, masse sufficientemente elevate. Ma i più semplici tra questi meccanismi si scontrano con una notevole regola di somma, scoperta nel 1979 da S. Ferrara, L. Girardello e F. Palumbo: in presenza di sole interazioni rinormalizzabili, e quindi in assenza di gravità, e a meno di correzioni quantistiche, le masse di campi bosonici e fermionici sono soggette in teorie supersimmetriche al vincolo

$$Str(\mathcal{M}^2) \;\equiv\; \sum_J (-1)^{2J}\,(2J+1)\,M_J^2 = 0 \;, \tag{4.1}$$

dove J denota lo spin delle particelle, anche in presenza di rottura spontanea. Per un multipletto di Wess e Zumino, ad esempio, questa relazione non consente di rendere i due bosoni più massivi del fermione, cosicché avremmo dovuto aver già visto un partner scalare dell'elettrone, e un'analisi accurata mostra l'impossibilità di giungere ad un'estensione supersimmetrica soddisfacente del Modello Standard. Questa evidente difficoltà complica lo scenario per teorie supersimmetriche, ma esiste un'interessante via d'uscita, che ha il pregio di evidenziare un possibile, profondo legame, tra il MSSM e la Supergravità. È infatti possibile mostrare che, in presenza di Supergravità, la formula di massa (4.1) viene modificata dalla comparsa nel secondo membro di termini che dipendono dalla massa del gravitino: in linea di principio, la rottura spontanea è quindi compatibile con i dati oggi disponibili, ma solo se la Supersimmetria ha una piena realizzazione come simmetria locale!

Non esistono modi evidenti per determinare la scala di rottura della Supersimmetria, e quindi per predire la differenza di massa tra le particelle note e i loro eventuali partners. Non è quindi semplice escludere che questi scenari siano realizzati ad energie ben oltre la nostra portata, ma se la scala di rottura della Supersimmetria fosse effettivamente dell'ordine di 1000 GeV o 1 TeV, come suggerito da certe considerazioni, gli esperimenti in programma al collisore LHC del CERN potrebbero portare ad una vera rivoluzione nella fisica delle particelle, contribuendo in parte anche a chiarire i suoi legami con la fisica della gravitazione.

Se comunque la rottura della Supersimmetria coinvolge in modo naturale la gravità, e quindi la natura dello spazio tempo, scenari assai complessi, e solo parzialmente esplorati, sono possibili. Ad esempio, come peraltro suggerito dalla Teoria delle Stringhe, la rottura della Supersimmetria potrebbe essere indotta dalla presenza di oggetti estesi nel vuoto. O, in termini più squisitamente pittorici, da altri universi che comunicano con il nostro mediante effetti radiativi.

Vogliamo concludere questa sezione menzionando un risultato particolarmente elegante, dovuto ad E. Witten, in grado di indicare a priori se, per un dato sistema, la Supersimmetria globale può essere rotta in conseguenza di effetti dinamici. Il punto di partenza è l'analogo di eq. (3.3) in cui anche i fermioni obbediscono a condizioni periodiche, che definisce una quantità nota appunto come indice di Witten e pari a

$$tr\left[(-1)^F\, e^{-\beta H}\right] \;, \tag{4.2}$$

dove $(-1)^F$ ha segni opposti per bosoni e fermioni. Questo indice ha la caratteristica di non dipendere da β, per una ragione che possiamo illustrare brevemente. È infatti possibile mostrare che la Supersimmetria stabilisce una corrispondenza biunivoca tra eccitazioni bosoniche e fermioniche di un dato sistema, ma solo limitatamente a stati che corrispondono ad energie non nulle della sua Hamiltoniana. L'indice di eq. (4.2) riceve pertanto contributi dai soli stati di energia nulla. Se quindi un eccesso di bosoni o di fermioni è presente in questi particolari stati, l'indice è necessariamente non nullo e la Supersimmetria è esatta, perché se gli stati in eccesso si sollevassero in energia mancherebbero dei necessari partners. Questo indice definisce anche una notevole classe di integrali funzionali calcolabili esattamente e ha trovato una serie di importanti applicazioni in Teoria dei Campi.

5 Conclusioni

In questo articolo abbiamo cercato di chiarire le ragioni del vasto interesse che la Supersimmetria riscuote, ormai da molti anni, nella comunità scientifica, a dispetto delle difficoltà che non abbiamo omesso di evidenziare. I pochi esempi che abbiamo potuto discutere dovrebbero rendere evidente che essa consente di ottenere risultati esatti di grande eleganza in Teoria dei Campi (e, in realtà, anche in Teoria delle Stringhe), e che questi risultati forniscono indicazioni assai preziose, anche se spesso solo di natura qualitativa, sul comportamento di ampie classi di sistemi e hanno stimolato sviluppi notevoli anche in Matematica. Nelle estensioni del Modello Standard, come abbiamo visto, la Supersimmetria collega il bosone di Higgs a campi fermionici, migliorando in modo sensibile la stabilità della teoria elettro-debole, ovvero dei valori delle masse dei bosoni intermedi $W^{\pm}$ e Z, rispetto agli effetti dovuti alle fluttuazioni quantistiche. In questo contesto essa fornisce inoltre candidati naturali per la materia oscura che sembra dominare la composizione del nostro universo. La Supersimmetria è infine di aiuto, almeno in parte, per il problema della costante cosmologica, fornendo indicazioni che puntano correttamente verso una riduzione della stima microscopica, seppure in modo non ancora soddisfacente. Il vero nodo della questione appare oggi legato ad una migliore comprensione dei meccanismi di rottura della Supersimmetria, anche sulla base dei nuovi dati che gli esperimenti potranno fornire nei prossimi anni, che hanno la possibilità concreta di chiarire l'effettivo ruolo che la Natura ha in serbo per queste idee. Possiamo ora concludere con una breve panoramica sull'evoluzione degli aspetti più recenti della teoria che abbiamo scelto di discutere in questo articolo.

Le origini della Supersimmetria vengono comunemente associate ai tentativi, effettuati da vari autori negli anni '60, di combinare simmetrie interne con le simmetrie spazio-temporali alla base della Relatività Speciale. Questa prospettiva si rivelò presto impraticabile nella sua forma originale, ma all'inizio degli anni '70 i tentativi furono riconsiderati, inizialmente in Unione Sovietica, da Yu. Gol'fand e E. Likhtman e D. Volkov e V. Akulov, ed estesi a simmetrie in grado di scambiare bosoni e fermioni. Questi sviluppi, e altri ad essi collegati, trassero anche importanti motivazioni dalla Teoria delle Stringhe, ma il vero culmine degli sforzi fu la costruzione, da parte di J. Wess e B. Zumino nel 1973, di un semplice modello in quattro dimensioni in cui la Supersimmetria collega fermioni di spin 1/2 e bosoni di spin 0. Questo risultato, a differenza dei precedenti, scatenò un grande interesse nella comunità scientifica e negli anni successivi fu seguito da una serie di sviluppi tumultuosi. Particolarmente notevole fu, nel 1976, la costruzione del primo esempio di Supergravità da parte di D. Freedman, P. van Nieuwenhuizen e S. Ferrara. Poco dopo, F. Gliozzi, J. Scherk e D. Olive riuscirono inoltre a collegare la Supergravità alla Teoria delle Stringhe, dando origine alle "superstringhe", che sono oggi un importante schema concettuale per l'unificazione della gravità con le altre interazioni fondamentali, e infine E. Cremmer, B. Julia e J. Scherk formularono nel 1978 la Supergravità in 11 dimensioni. In breve si giunse inoltre alla formulazione del MSSM e, soprattutto, come abbiamo visto, a chiarire il suo possibile profondo legame con la Supergravità, grazie in particolare al contributo di R. Barbieri, S. Ferrara e C. Savoy.

Gli anni successivi hanno visto profondi e molteplici sviluppi, di crescente sofisticazione matematica, ispirati dalla Supersimmetria e dal suo ruolo nella Teoria delle Stringhe. Queste ricerche sono state stimolate in modo sostanziale da contributi di E. Witten, alcuni dei quali sono stati brevemente descritti in questo articolo, che hanno anche avuto un notevole impatto in Matematica. Essi hanno anche visto lo sviluppo delle superstringhe e la comprensione, seppur parziale, della natura unitaria dei principi che ad esse sottendono, nonchè dei loro legami con la Supergravità e del ruolo di quest'ultima in relazione alla loro consistenza matematica, segnato in modo particolare dalla scoperta da parte di M.B. Green e J.H. Schwarz del meccanismo di cancellazione di anomalie che porta il loro nome. Ma, come abbiamo anticipato, il successo dei molti tentativi di applicare queste idee alla Fisica delle Particelle Elementari resta a tutt'oggi parziale.

Ringraziamenti

Siamo grati al Prof. Giorgio Parisi per il cortese invito a scrivere questo articolo, al Prof. R. Barbieri, al Prof. S. Ferrara e al Dr. V. Rychkov per interessanti discussioni e alla redazione dell'Enciclopedia Italiana, e in particolare al Prof. S. Petruccioli, per la pazienza con il nostro notevole ritardo rispetto ai tempi inizialmente previsti per questo contributo. Siamo inoltre grati al Dr. Dario Francia, al Dr. Gianfranco Pradisi e al Prof. Giancarlo Rossi per un'attenta lettura del manoscritto e per i molti utili commenti. Questo lavoro è stato prodotto nell'ambito del contratto MIUR-PRIN 2003-023852 e dell'iniziativa specifica TS11 dell'INFN.

Bibliografia

[1] Introduzioni alla Supersimmetria, alla Supergravità e alle loro applicazioni:

J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity" (Princeton, Princeton University Press, 1992);
S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields", 3 vols. (Cambridge, Cambridge University Press, 2000),
P.C. West, "Introduction to Supersymmetry and Supergravity" (Singapore, World Scientific, 1990).

[2] Alcuni articoli di rassegna significativi:

P. Fayet and S. Ferrara, "Supersymmetry," Phys. Rept. **32** (1977) 249;
P. Van Nieuwenhuizen, "Supergravity," Phys. Rept. **68** (1981) 189;
R. Barbieri and S. Ferrara, "Supersymmetry And Fundamental Interactions In The Region Of The Fermi Scale," Surveys High Energ. Phys. **4** (1983) 33;
H.P. Nilles, "Supersymmetry, Supergravity And Particle Physics," Phys. Rept. **110** (1984) 1;
M.J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, "Kaluza-Klein Supergravity," Phys. Rept. **130** (1986) 1;
D. Amati, K. Konishi, Y. Meurice, G. C. Rossi and G. Veneziano, "Non-Perturbative Aspects in Supersymmetric Gauge Theories," Phys. Rept. **162** (1988) 169;
I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, "Dynamical Supersymmetry Breaking In Supersymmetric QCD," Nucl. Phys. B **241** (1984) 493. I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, "Dynamical Supersymmetry Breaking In Four-Dimensions And Its Phenomenological Implications," Nucl. Phys. B **256** (1985) 557. K. A. Intriligator and N. Seiberg, "Lectures on supersymmetric gauge theories and electric-magnetic duality," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45BC** (1996) 1 [arXiv:hep-th/9509066];
Z. Bern, L. J. Dixon, M. Perelstein, D. C. Dunbar and J. S. Rozowsky, "Perturbative relations between gravity and gauge theory," Class. Quant. Grav. **17** (2000) 979 [arXiv:hep-th/9911194];
M.J. Duff, R. R. Khuri and J. X. Lu, "String solitons," Phys. Rept. **259** (1995) 213 [arXiv:hep-th/9412184];
G.F. Giudice and R. Rattazzi, "Theories with gauge-mediated supersymmetry breaking," Phys. Rept. **322** (1999) 419 [arXiv:hep-ph/9801271].

[3] Introduzioni alla Teoria delle Stringhe:

M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory", 2 vols. (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1988);
J. Polchinski, "String Theory", 2 vols. (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1998);
B. Zwiebach, "A first course in String Theory" (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2004).